Exercice 19

ABC est un triangle.

1) **Construire** le point *M* tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

2) **Construire** le point *N* tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

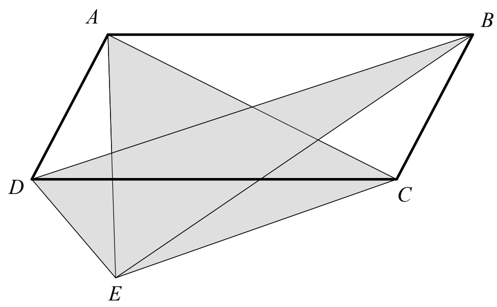
3) **Démontrer** que les points *A*, *M* et *N* sont alignés.

Exercice 20

Sur la figure ci-contre, *ABCD* est un parallélogramme.

Soit *G* le centre de gravité du triangle *AEC*.

Démontrer que *G* est le centre de gravité du triangle *BDE*



Exercice 21

ABCD est un parallélogramme.

1) Construire les points *E* et *F* définis par : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = -2\overrightarrow{DA}$.

2) En déduire que *E*, *F* et *C* sont alignés.

Exercice 4 ABC est un triangle quelconque. On définit les points M, N et P par les relations :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Démontrer que les points M, N et P sont alignés.

Exercice 5 Soit ABC un triangle quelconque et G son centre de gravité. Démontrer que :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

Exercice 6 ABC est un triangle quelconque. Les points D et E sont définis par :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

Démontrer que les points A, D et E sont alignés.

Exercice 7 On considère un triangle ABC quelconque. On appelle O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, A' le milieu du segment $[BC]$,B' le milieu du segment $[AC]$ et C' le milieu du segment $[AB]$.

1. On considère le point H défini par la relation : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.(1)

   (a) Justifier que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$;

   (b) En déduire de la relation (1) que : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$

   (c) Démontrer alors que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

   (d) De la même façon, en déduire que les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires.

   (e) Que représente le point H pour le triangle ABC ?

2. On appelle G le centre de gravité du triangle ABC.

   (a) Démontrer que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

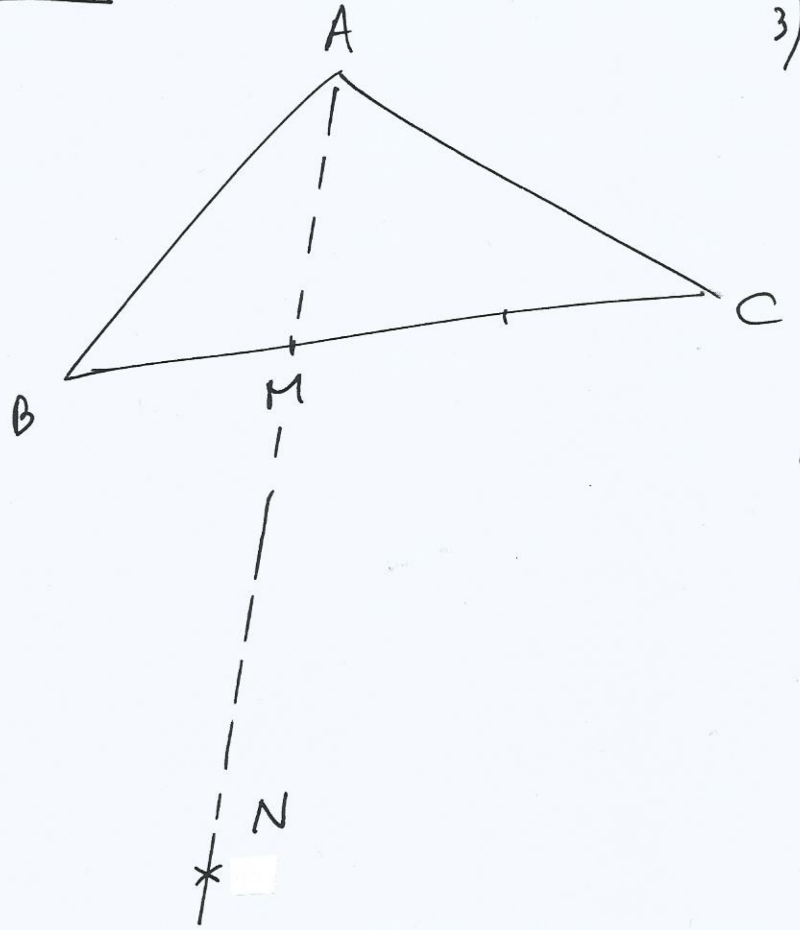
   (b) En déduire que : $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

   (c) En déduire d'après les questions précédentes que :$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$

   (d) Que peut-on dire de l'orthocentre, du centre de cercle circonscrit et du centre de gravité d'un triangle ?

La droite qui passe par les points O, H et G est appelée droite d'EULER du triangle.

Ex 19



3) $\vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

$\vec{AM} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

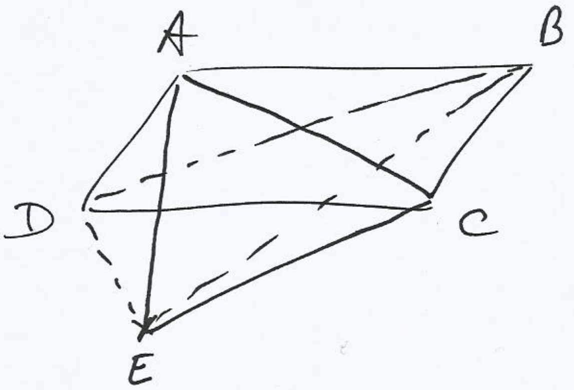
$\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

or $\vec{AN} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$

donc $\boxed{\vec{AN} = 3\vec{AM}}$

A, M et N sont alignés

Ex 20



G centre de gravité de BDE $\Leftrightarrow \vec{GB} + \vec{GD} + \vec{GE} = \vec{0}$

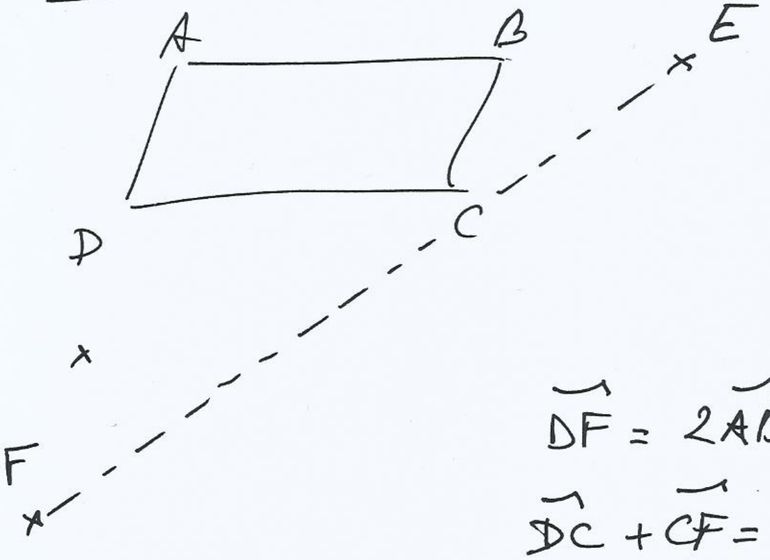
or $\vec{GA} + \vec{GE} + \vec{GC} = \vec{0}$

$\vec{GB} + \vec{BA} + \vec{GE} + \vec{GD} + \vec{DC} = \vec{0}$

de +, $\vec{BA} = -\vec{DC}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{GB} + \vec{GD} + \vec{GE} = \vec{0}}$

Ex 21



$\vec{AE} = \frac{3}{2}\vec{AB}$

$\vec{AC} + \vec{CE} = \frac{3}{2}\vec{AB}$

$\vec{CE} = \frac{3}{2}\vec{AB} - \vec{AC}$

$\vec{DF} = 2\vec{AD}$

$\vec{DC} + \vec{CF} = 2\vec{AC} + 2\vec{CD}$

$\vec{CF} = 2\vec{AC} - 3\vec{DC}$ avec $\vec{DC} = \vec{AB}$

$\Rightarrow \vec{CF} = -3\vec{AB} + 2\vec{AC}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{CF} = -2\vec{CE}}$

$\Rightarrow$ E, C, F alignés

Ex 4

- $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = -\frac{3}{2}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{AB}$
- $\vec{BA} + \vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AM} + \vec{MP}$

$\Rightarrow \vec{MP} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \vec{AB} - \frac{3}{2}\vec{AC}$

$\Rightarrow \vec{MP} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{AB} - \frac{3}{2}\vec{AC}$

$\Rightarrow \vec{MP} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AC}$

d'où $\boxed{\vec{MN} = \frac{3}{2}\vec{MP}}$

M, N, P alignés

$\boxed{\text{Ex 5}}$ A' milieu de [BC] donc $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$

or $\vec{AA'} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$

$\Rightarrow \vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

$\Rightarrow 3\vec{AG} = (\vec{AG} + \vec{GB}) + (\vec{AG} + \vec{GC})$

$\Rightarrow \vec{AG} = \vec{GB} + \vec{GC}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}}$

$\boxed{\text{Ex 7}}$

1) a) (OA') médiane de OBC $\Rightarrow \boxed{\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OA'}}$

$\boxed{\text{ou}}$ $\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA'} + \cancel{\vec{A'B}} + \vec{OA'} + \cancel{\vec{A'C}} = 2\vec{OA'}$

b) $\vec{OH} = \vec{OA} + 2\vec{OA'} \Rightarrow \boxed{\vec{AH} = 2\vec{OA'}}$

c) (OA') médiatrice de [BC] or (OA') // (AH) $\Rightarrow \boxed{(AH) \perp (BC)}$

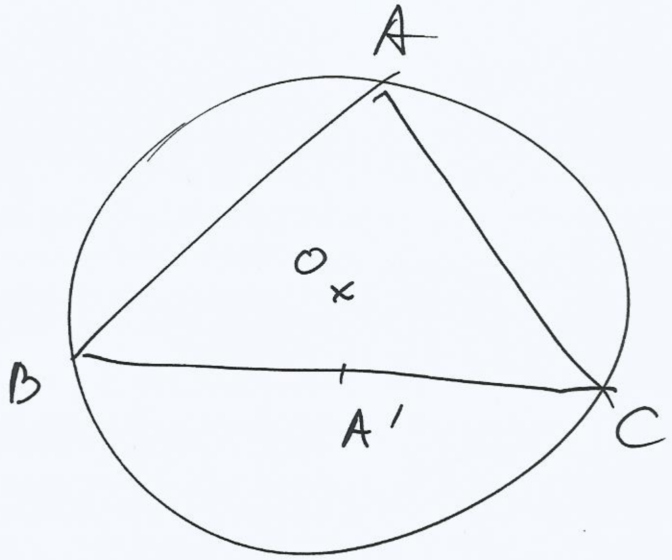
d) $\vec{BH} = 2\vec{OB'} \Rightarrow \boxed{(BH) \perp (AC)}$

e) H orthocentre

2) a) $\boxed{\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}}$ (cf ex 5)

b) $\vec{GO} + \vec{OA} + \vec{GO} + \vec{OB} + \vec{GO} + \vec{OC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \boxed{3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}$



c) (1) $\Rightarrow$ $\boxed{3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}}$

d) O, G et H sont alignés (droite d'Euler)