Devoir de mathématiques

Exercice 1

1. Résoudre les équations suivantes :
   a $x^2 = 7x$
   b $x^4 - x^2 = 0$
   c $-x^2 + 7x - 3 = 5 - 2x$
   d $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{6}x + 3\sqrt{2} = 0$
2. On cherche à résoudre l'équation (E) : $x^3 + 6x^2 + 13x + 10 = 0$.
   a Montrer que $x^3 + 6x^2 + 13x + 10 = (x+2)(x^2 + 4x + 5)$
   b Résoudre alors l'équation (E).

Exercice 2

1) Soit le polynôme $P(x) = 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.
Montrer que le polynôme P peut se factoriser sous la forme $P(x) = (x+1)Q(x)$, où $Q(x)$ est un trinôme du second degré que l'on déterminera.

Déterminer alors les solutions de l'équation $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.

2) On considère la fraction rationnelle : $f(x) = \dfrac{3x^3 - 7x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 12x + 12}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 3 Soit $f(x) = x^2 + mx + m$, où m désigne un nombre réel.

1. Pour quelle valeur de m le nombre 1 est-il racine de f ?
   Déterminer alors l'autre racine.
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles f admet deux racines distinctes.
3. Existe-t'il des valeurs de m telles que, pour tout réel x, $f(x) > 1$?

Exercice 4 On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 20$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Vérifier que 1 est une racine de f, puis déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que, pour tout réel x, $f(x) = (x-1)Q(x)$.

   En déduire les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses, ainsi que le signe de $f(x)$.
2. a) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = (x-2)^3 + 9(x-2)^2 - 8$.
   b) On note u la fonction définie sur $[2; +\infty[$ par $u(x) = (x-2)^3$.
   Ecrire u comme la composée de deux fonctions de référence, et en déduire le sens de variation de u.
   c) Déterminer le sens de variation de f sur $[2; +\infty[$.
   d) On appelle g la fonction définie sur $[3; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   Montrer que g est minorée sur $[3; +\infty[$, c'est-à-dire qu'il existe un réel a tel que, pour tout réel $x \in [3; +\infty[$, $g(x) \leqslant a$.