2de Compétition du 27/11/18 3h Corrigé succinct

I) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $(E) : 4x^2 - 9 - 2(2x-3) + x(2x-3) = 0$ (pas de conditions)

$(E) \Leftrightarrow (2x-3)(2x+3) - 2(2x-3) + x(2x-3) = 0$

$(E) \Leftrightarrow (2x-3)(2x+3-2+x) = 0$

$(E) \Leftrightarrow (2x-3)(3x+1) = 0$

$(E) \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{1}{3}$

$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3} ; \frac{3}{2}\right\}}$

2) $(E') : \frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{4x^2+8x+16}{x^2-4}$

conditions : $\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -2$

$(E') \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2 - (x+2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{4x^2+8x+16}{(x-2)(x+2)}$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$

$(E') \Leftrightarrow (x-2)^2 - (x+2)^2 = 4x^2+8x+16$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$

$(E') \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - x^2 - 4x - 4 - 4x^2 - 8x - 16 = 0$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$

$(E') \Leftrightarrow -4x^2 - 16x - 16 = 0$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$

$(E') \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$

$(E') \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$

$(E') \Leftrightarrow x = -2$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$

$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

II) Partie A

1) Vérification d'égalité

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\boxed{8 - f(x)} = 8 + 2x^2 - 8x = 2(x^2 - 4x + 4) = \boxed{2(x-2)^2}$

2) Extremum de f

On remarque que $f(2) = 8$

donc d'après 1), pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(2) - f(x) = 2(x-2)^2$

a un carré est toujours positif ou nul donc $f(2) - f(x) \geqslant 0$

donc $f(2) \geqslant f(x)$

donc $\boxed{f \text{ admet un maximum de } 8 \text{ en } x = 2 \text{ sur } \mathbb{R}}$

3) Variations sur $]-\infty ; 2]$

Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 \leqslant 2$,

déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= -2x_1^2 + 8x_1 + 2x_2^2 - 8x_2 \\ &= -2\left[(x_1^2 - x_2^2) - 4(x_1 - x_2)\right] \\ &= -2\left[(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2)\right] \\ &= -2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4) \end{aligned}$$

or par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_1 - x_2 < 0$ donc $-2(x_1 - x_2) > 0$

$x_1 < 2$ et $x_2 \leqslant 2$ donc $x_1 + x_2 < 4$ donc $x_1 + x_2 - 4 < 0$

Bilan, $f(x_1) - f(x_2) < 0$ donc $f(x_1) < f(x_2)$

donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty ; 2]}$

Variations sur $[2 ; +\infty[$

Pour tous x_1, x_2 tels que $2 \leqslant x_1 < x_2$

on a : $f(x_1) - f(x_2) = -2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)$

or par (H), $x_1 < x_2$ donc $x_1 - x_2 < 0$ donc $-2(x_1 - x_2) > 0$

$x_1 \geqslant 2$ et $x_2 > 2$ donc $x_1 + x_2 > 4$ et $x_1 + x_2 - 4 > 0$

Bilan, $f(x_1) - f(x_2) > 0$ donc $f(x_1) > f(x_2)$

donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [2 ; +\infty[}$

4) Courbe $\mathcal{C}_f$

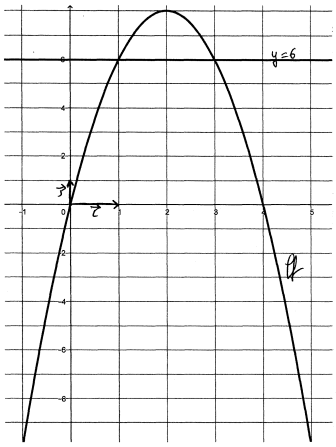


Tableau de variations

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		↗	8	↘	

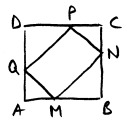
5) Résoudre graphiquement $f(x) > 6$

Les solutions sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au dessus de la droite d'équation $y = 6$

$\boxed{\mathcal{S} =]1 ; 3[}$

Partie B

1) Figure



2) A quel intervalle appartient x ?

par (H) $M \in [AB]$ donc $AA \leqslant AM \leqslant AB$ donc $0 \leqslant x \leqslant 4$

De même pour N, P et Q donc $\boxed{x \in [0 ; 4]}$

3) Aire de AMQ

AMQ est un triangle rectangle isocèle en A

donc pour tout x de $[0 ; 4]$, $\text{Aire}(AMQ) = \frac{AM \times AQ}{2} = \frac{x^2}{2}$

Aire de BMN

BMN est un triangle rectangle isocèle en B

donc pour tout x de $[0 ; 4]$, $\text{Aire}(BMN) = \frac{BM \times BN}{2} = \frac{(4-x)^2}{2}$

4) Aire de MNPQ

D'après la construction de la figure, les triangles AMQ et CPN ont les mêmes dimensions et donc la même aire.

Il en est aussi de même avec BMN et DQP.

Donc pour tout x de $[0 ; 4]$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(MNPQ) &= \text{Aire}(ABCD) - \text{Aire}(AMQ) - \text{Aire}(BMN) - \text{Aire}(CPN) - \text{Aire}(DQP) \\ &= 4 \times 4 - \frac{x^2}{2} - \frac{(4-x)^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{(4-x)^2}{2} \\ &= 16 - x^2 - (4-x)^2 \\ &= 16 - x^2 - 16 + 8x - x^2 \\ &= -2x^2 + 8x = f(x) \end{aligned}$$

5) Maximum de Aire(MNPQ)

D'après B4), l'aire de MNPQ a le même maximum que f

D'après A2), f admet un maximum de 8 en $x = 2$ sur $\mathbb{R}$ et donc aussi sur $[0 ; 4]$

donc le quadrilatère MNPQ atteint son aire maximum $\boxed{\text{en } x = 2}$

et cette aire est $8\ \text{cm}^2$

6) Aire $(MNPQ) > 6$?

D'après A5) $f(x) > 6 \Leftrightarrow x \in]1 ; 3[$

donc $\boxed{MNPQ \text{ a une aire supérieure à } 6 \text{ lorsque } 1 < x < 3}$

Partie C

1) $(A, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé ?

Par (H) ABCD est un carré de côté 4 cm et $\vec{i} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{4}\vec{AD}$

donc $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont non colinéaires et $(A, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère

de plus $(AB) \perp (AD)$ donc ce repère est orthogonal

de plus $AB = AD$ donc **ce repère est orthonormé**

2) Coordonnées des points de la figure

A est l'origine du repère donc **$A(0;0)$**

$\vec{AB} = 4\vec{i}$ donc **$B(4;0)$**

$\vec{AD} = 4\vec{j}$ donc **$D(0;4)$**

ABCD est un carré donc $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$ donc **$C(4;4)$**

pour tout x de $[0;4]$ $AM = x$ donc $\vec{AM} = x\vec{i}$ donc **$M(x;0)$**

$\vec{AN} = \vec{AB} + \vec{BN} = 4\vec{i} + (4-x)\vec{j}$ donc **$N(4;4-x)$**

$\vec{AP} = \vec{AD} + \vec{DP} = 4\vec{j} + (4-x)\vec{i}$ donc **$P(4-x;4)$**

$\vec{AQ} = x\vec{j}$ donc **$Q(0;x)$**

3) Montrer que MNPQ est un rectangle

D'après 2) pour tout x de $[0;4]$ $\vec{MN}\begin{pmatrix}4-x\\4-x\end{pmatrix}$ et $\vec{QP}\begin{pmatrix}4-x\\4-x\end{pmatrix}$

donc $\vec{MN} = \vec{QP}$ donc MNPQ est un parallélogramme

le repère étant orthonormé calculons les longueurs des diagonales :

$QN = \sqrt{(x_N - x_Q)^2 + (y_N - y_Q)^2} = \sqrt{4^2 + (4-2x)^2}$

$MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = \sqrt{(4-2x)^2 + 4^2}$

donc $QN = MP$ donc le parallélogramme MNPQ a ses diagonales de même longueur et est un rectangle

4) ABCD et MNPQ ont le même centre ?

les deux quadrilatères sont notamment des parallélogrammes.

leurs centres sont donc les milieux de l'une de leurs diagonales

Appelons I le centre de ABCD qui est le milieu de $[AC]$

$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{4}{2} = 2$ et $y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4}{2} = 2$

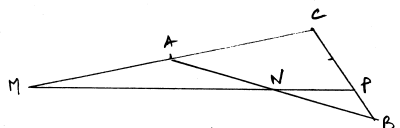
Appelons J le centre de MNPQ qui est le milieu de $[MP]$

$x_J = \frac{x_M + x_P}{2} = \frac{x + 4 - x}{2} = 2$ et $y_J = \frac{y_N + y_P}{2} = \frac{4}{2} = 2$

I et J sont confondus donc **ABCD et MNPQ ont bien le même centre**

Partie III

1) Figure



2) $\vec{MN}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

Par (H) $\vec{AM} = -\vec{AC}$ donc $\vec{MA} = \vec{AC}$

$\vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

donc **$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC}$**

3) $\vec{MP}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

D'après 2) $\vec{MA} = \vec{AC}$ et par (H) $\vec{BP} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

donc $\vec{MP} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BP}$

$= \vec{AC} + \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC}$

$= \vec{AC} + \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{AC})$

$= \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{4}{3}\vec{AC}$

4) Alignement de M, N et P

D'après 2) $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC}$

D'après 3) $\vec{MP} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{4}{3}\vec{AC} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC}\right) = \frac{4}{3}\vec{MN}$

donc $\vec{MP}$ est colinéaire à $\vec{MN}$

donc **M, N et P sont alignés**

IV) Partie A

1) Univers équiprobable

Représentons l'expérience par un tableau :

dé 1 / dé 2	1	2	3	4	5	6
1	(1)	2	(3)	4	(5)	6
2	2	4	6	8	10	12
3	(3)	6	(9)	12	(15)	18
4	4	8	12	16	20	24
5	(5)	10	(15)	20	(25)	30
6	6	12	18	24	30	36

Il y a 36 cases dans le tableau donc 36 issues :

$\Omega = \{(1;1);(1;2);\dots(2;1);(2;2);\dots(6;6)\}$

2) Appelons A l'événement "Joe gagne avec sa règle du jeu"

Dans le tableau, on a entouré en pointillés les issues correspondantes

les issues sont équiprobables.

$p(A) = \frac{\text{nbre d'issues de } A}{\text{nbre total d'issues}} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} \approx 0{,}722$

3) Appelons B l'événement "Billy gagne avec sa règle du jeu"

Dans le tableau, on a entouré par des cercles les issues correspondantes à $\overline{B}$

$p(\overline{B}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ donc **$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$**

Partie B

1) Variable à initialiser

Au tout début de l'algorithme il faut initialiser J : **$J = 0$**

2) Que fait l'algorithme ?

J contient le nombre de parties gagnées par Joe avec la 1ère règle.

L'algorithme simule 1000 parties, et pour chaque partie, mémorise les deux lancers de dés dans les variables D et E et augmente J si Joe a gagné la partie en cours.

Puis, à la fin, l'algorithme affiche $\frac{J}{1000}$, c'est à dire la proportion des parties gagnées par Joe.

3) Les résultats sont-ils surprenants ?

D'après la question A2), la probabilité que Joe gagne avec la 1ère règle est $p(A) \approx 0{,}722$.

Or finalement, on constate que les valeurs proposées fluctuent autour de $p(A)$ et ce n'est bien sûr pas du tout surprenant !

4) Algorithme modifié :

```
J = 0
Pour I de 1 à 1000
    D = entier aléatoire de 1 à 6
    E = entier aléatoire de 1 à 6
    Si D + E < 10
        J = J + 1
    Sinon
        J = J - 2
    Fin Si
Fin Pour
Afficher J
```

Classes de 2nde	**Composition n°2 de mathématiques**	Jeudi 23 mars 2017
Calculatrice autorisée		Durée : 3h00

Exercice 1 :

Partie A :

f est une fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ dont voici le tableau de variation :

x	-2		1		3
variations de f	-1	↗	2	↘	0

1. Pour tout nombre réel x de $[-2\,;3]$, $f(x) \geq 0$	F
2. Pour tout nombre réel x de $[-2\,;3]$, $f(x) \leq 3$	V
3. Il existe un nombre réel x de $[-2\,;3]$ tel que $f(x) < 0$	V
4. Il existe un nombre réel x de $[-2\,;3]$ tel que $f(x) = -2$	F
5. Pour tout nombre réel x de $[-2\,;3]$, il existe un nombre réel x' de $[-2\,;3]$ tel que $f(x') > f(x)$	F

Partie B :

6. Si f est croissante sur $[0\,;2]$, alors f est croissante sur $[0\,;1]$	V
7. Si f est décroissante sur $[0\,;2]$, alors $f(0{,}5) \geq f(0{,}6)$	V
8. Si $f(0) < f(1)$, alors f est croissante sur $[0\,;1]$	F
9. Si f admet un maximum en 1 sur $[0;1]$, alors f est croissante sur $[0;1]$	F
10. Si f n'est pas croissante sur $[0;1]$, alors f est décroissante sur $[0;1]$	F

Exercice 2 (9 points) : On considère les fonctions $f : x \mapsto -x^2 + 6x - 5$ et $g : x \mapsto -1 + \frac{4}{x-1}$.

1. Ensembles de définition D_f et D_g :

Pas de valeur interdite pour $f(x)$ donc $D_f = \mathbb{R}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$

2. Montrer que f atteint un maximum de 4 sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminons le signe de $f(x) - f(3)$:

$f(x) - f(3) = -x^2 + 6x - 5 - (-3^2 + 6 \times 3 - 5) = -x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2$.

Un carré étant toujours positif ou nul : $f(x) - f(3) \leq 0$ donc $f(x) \leq f(3)$ avec $f(3) = 4$

Donc f admet un maximum de 4 atteint en 3 sur $\mathbb{R}$

3. a.

Variations de f sur $]-\infty; 3]$.

Soit a et b deux réels tels que $a < b \leq 3$. Etudions le signe de $f(a) - f(b)$:

$f(a) - f(b) = -a^2 + 6a - 5 + b^2 - 6b + 5 = (a+b)(b-a) - 6(b-a) = (b-a)(a+b-6)$

Par hypothèse : $a < b \Rightarrow b - a > 0$

$a < 3$ et $b \leq 3 \Rightarrow a + b < 6 \Rightarrow a + b - 6 < 0$

donc $f(a) - f(b) < 0$ donc $f(a) < f(b)$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 3]$

Variations de f sur $[3; +\infty[$.

Pour tous réels a et b tels que $3 \leq a < b$, étudions le signe de $f(a) - f(b)$:

$f(a) - f(b) = (b-a)(a+b-6)$

Par hypothèse : $a < b \Rightarrow b - a > 0$

$a \geq 3$ et $b > 3 \Rightarrow a + b > 6 \Rightarrow a + b - 6 > 0$

donc $f(a) - f(b) > 0$ donc $f(a) > f(b)$ donc f est strictement décroissante sur $[3, +\infty[$

b. Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f	↗	4	↘

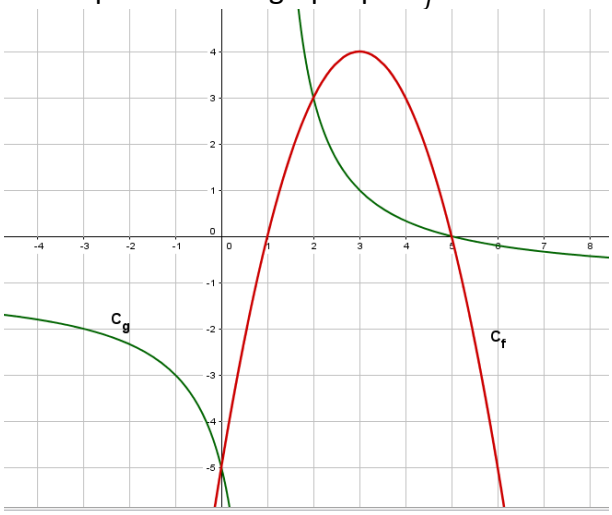
4. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -(x-5)(x-1)$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, développons l'expression : $-(x-5)(x-1) = -x^2 + 6x - 5 = f(x)$

5. Signe de $f(x)$.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$x-5$		−		−	0	+	
$x-1$		−	0	+		+	
-1		−		−		−	
$f(x)$		−	0	+	0	−	

Bilan :
$f(x)$ est strictement positif sur]1 ; 5[et C_f est au-dessus de l'axe des abscisses
$f(x)$ est strictement négatif sur $]-\infty; 1[$ et sur $]5; +\infty[$ et C_f est en-dessous de l'axe des abscisses
$f(x)$ est nul en $x = 1$ et $x = 5$ et C_f croise l'axe des abscisses

6. Représentation graphique C_f



7. a. Variations de g sur $]-\infty; 1[$.
Pour tous réels a et b tels que $a < b < 1$, étudions le signe de $g(a) - g(b)$:

$$g(a) - g(b) = -1 + \frac{4}{a-1} + 1 - \frac{4}{b-1} = \frac{4(b-1) - 4(a-1)}{(a-1)(b-1)} = \frac{4(b-a)}{(a-1)(b-1)}$$

Par hypothèses :
$a < b \Rightarrow b - a > 0$
$a < 1 \Rightarrow a - 1 < 0$ et $b < 1 \Rightarrow b - 1 < 0$
Bilan : $g(a) - g(b) > 0$ donc $g(a) > g(b)$ donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$

b. Tableau de variations de g sur D_g.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g	↘	‖	↘

8. Résoudre par le calcul : (E) : $f(x) = g(x)$.

$(\text{E}) \Leftrightarrow -(x-5)(x-1) = -1 + \dfrac{4}{x-1}$ et $x \neq 1$

$(\text{E}) \Leftrightarrow -(x-5)(x-1) = \dfrac{-x+5}{x-1}$ et $x \neq 1$

$(\text{E}) \Leftrightarrow \dfrac{-(x-5)(x-1)^2 + (x-5)}{x-1} = 0$ et $x \neq 1$

$(\text{E}) \Leftrightarrow -(x-5)(x-1)^2 + (x-5) = 0$ et $x \neq 1$

$(\text{E}) \Leftrightarrow (x-5)[-(x-1)^2 + 1] = 0$ et $x \neq 1$

$(\text{E}) \Leftrightarrow (x-5)[x(2-x)] = 0$ et $x \neq 1$

$(\text{E}) \Leftrightarrow x(x-5)(2-x) = 0$ et $x \neq 1$

$(\text{E}) \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = 0$ ou $x = 2$

$S = \{0\ ;\ 2\ ;\ 5\}$

Graphiquement cela signifie que les courbes représentatives de *f* et *g* ont 3 points d'intersections ayant pour abscisses respectives, 0, 2 et 5.

9. Résoudre par le calcul $f(x) \geq g(x)$ sur D_g.

$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \dfrac{x(x-5)(2-x)}{x-1} \geq 0$ et $x \neq 1$

x	$-\infty$		0		1		2		5	$+\infty$
x	$-$		0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-5$	$-$			$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$			$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2-x$	$+$			$+$		$+$	0	$-$		$-$
$\frac{x(x-5)(-x+2)}{x-1}$	$-$		0	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$

$S = [0; 1[\cup [2; 5]$.

Graphiquement cela signifie que la courbe représentatives de *f* se situe au-dessus de celle de *g* sur les intervalles [0 ; 1[et [2 ; 5]

Exercice 3 (2,5 points) :

1. Traduire à l'aide des notations d'ensemble et de logique chacun des évènements suivants :

$$C = A \cap B \qquad D = \overline{A} \qquad E = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

2. a. Définir l'événement $A \cap \bar{B}$ par une phrase : « la souris ne présente que la maladie A »

b. L'événement « La souris présente la maladie A mais pas la maladie B » est-il inclus dans $\bar{B}$? Oui

3. La probabilité qu'une souris n'ait pas la maladie A est 0,7, donc $P(\overline{A}) = 0{,}7$ et $P(\text{A}) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}3$

La probabilité qu'une souris ait la maladie A ou la maladie B est 0,7 donc $P(A \cup B) = 0{,}7$

La probabilité qu'une souris ait la maladie A et la maladie B est 0,2 donc $P(A \cap B) = 0{,}2$

Or $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

donc $0{,}7 = 0{,}3 + P(B) - 0{,}2$

donc $P(B) = 0{,}6$ donc $P(\overline{B}) = 1 - P(\text{B}) = 0{,}4$

Exercice 4 (2 points) :

1. Que représentent les variables F et S dans cet algorithme ?

F représente la valeur obtenue lors du dernier lancé de dé

et S représente la somme des lancés de dés.

2. Déterminer un univers de l'expérience

$\Omega = \{(1;1;1); (1;1;2); (1;1;3); (1;1;4); (1;1;5); (1;1;6); (1;2;1); (1;2;2); \ldots (6;6;4); (6;6;5); (6;6;6)\}$

Les issues sont équiprobables et il y en a $6 \times 6 \times 6 = 216$

Calculer p(A) :
L'événement A correspond à une seule issue : (1 ;1 ;1) et il y a équiprobabilité donc :

$$P(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{1}{216}$$

Exercice 5 (4 points) :

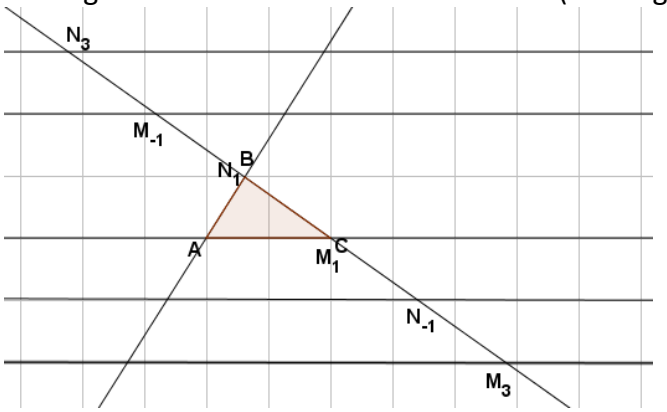
1. Justifier que $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan.
ABC étant un triangle non aplati, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Ils forment donc bien avec le point A un repère du plan.

2. a. Coordonnées des points A, B, C et I dans ce repère.
A étant l'origine du repère, $A(0,0)$.
$\overrightarrow{AB} = 1\,\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AC}$ d'où $B(1,0)$
$\overrightarrow{AC} = 0\,\overrightarrow{AB} + 1\,\overrightarrow{AC}$ d'où $C(0,1)$
I est le milieu de $[BC]$ donc $x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1}{2}$ d'où $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b. Coordonnées des points M et N en fonction de m, pour $m \in \mathbb{R}$.
Par hypothèses, $\overrightarrow{AM} = (1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{AB} + (1-m)\overrightarrow{AC}$
donc : $M(1-m, m)$ et $N(m, 1-m)$

3. Si $m = 1$, où sont les points M et N ?
Si $m = 1$, $M(0,1)$ donc M est confondu avec C et $\mathrm{N}(1,0)$ donc N est confondu avec B.

4. Figure dans les cas suivants : $m = -1$ (en rouge) puis $m = 3$ (en vert).



5. Montrer que, pour tout m de $\mathbb{R}$, $\overrightarrow{BM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$. Que peut-on en déduire ?
Pour tout m de $\mathbb{R}$, on a par hypothèses : $\overrightarrow{AM} = (1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$
donc : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + (1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} = -m\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} = m(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = m\overrightarrow{BC}$
donc $\overrightarrow{BM}$ est toujours colinéaire à $\overrightarrow{BC}$.
On en déduit que M est toujours aligné avec B et C.

6. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles M et N sont confondus.
D'après 2)b, on a : $M(1-m, m)$ et $N(m, 1-m)$
donc : M et N confondus $\Leftrightarrow x_M = x_N$ et $y_M = y_N \Leftrightarrow 1 - m = m \Leftrightarrow 1 = 2m \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

7. Montrer que, pour tout m de $\mathbb{R}$, I est le milieu de [MN].
Calculons les coordonnées du milieu Ω de [MN] : $x_\Omega = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{1-m+m}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad y_\Omega = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{m+1-m}{2} = \frac{1}{2}$
Ω et I ayant les mêmes coordonnées, I est bien le milieu de [MN].