Dérivation

Énoncés

Ⓐ Exercices d'application du cours

Ⓡ Exercices de réflexion

13 mai 2016

■ Exercice 1. Nombre dérivé & équation de tangentes

★★☆☆☆ Ⓐ

Corrigé page 89

(Source : 04-derivation-03)

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(a)$ puis trouver l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

1. $f(x) = x^2$, $a = 2$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$
3. $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $a = -1$
4. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$

■ Exercice 2. Lecture graphique de nombres dérivés

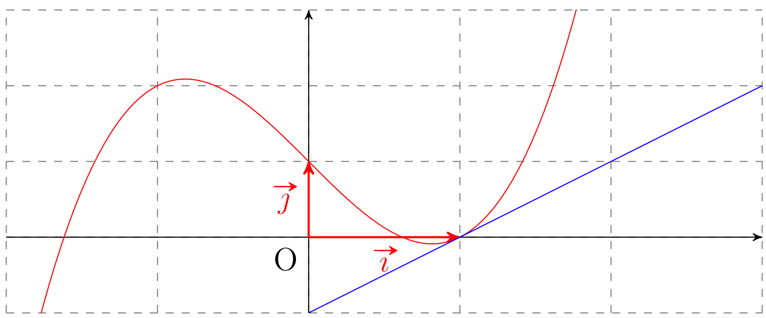
★☆☆☆☆ Ⓐ

Corrigé page 91

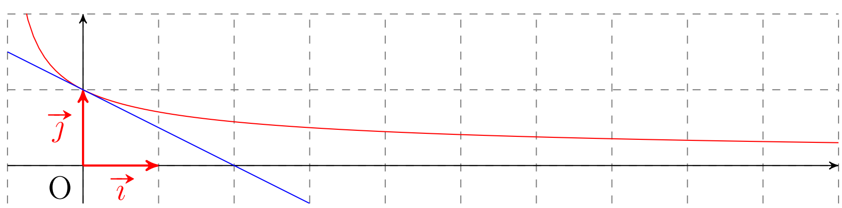
(Source : 04-derivation-04)

Pour chacune des questions suivantes, on a la représentation graphique d'une fonction f (en rouge) et la tangente à cette représentation au point d'abscisse a. Déterminer graphiquement $f'(a)$, puis écrire l'équation réduite de la tangente tracée.

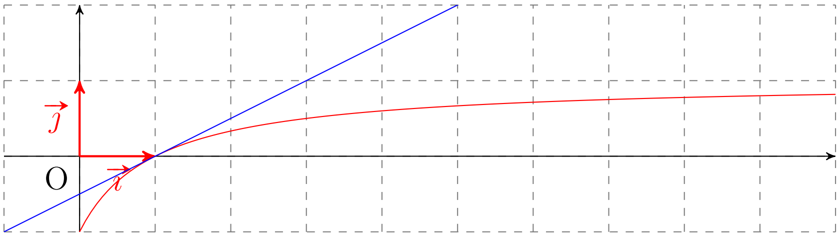
1. $a = 1$.



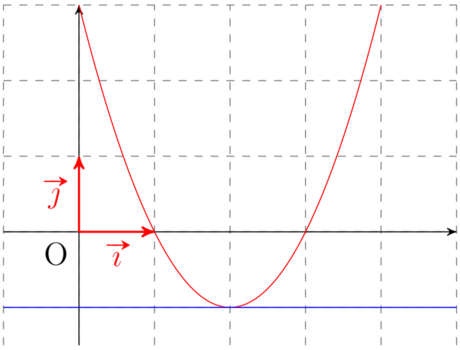
2. $a = 0$.



3 $a = 1$.



4 $a = 2$.

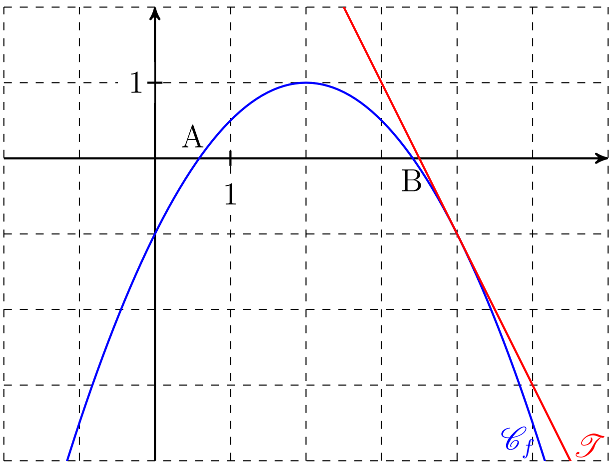


■ Exercice 3. Détermination d'une fonction par lecture graphique

★★☆☆☆ R

Corrigé page 92

(Source : 04-derivation-05)



La courbe ci-dessus représente la fonction f dont l'expression est de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

1 Lire graphiquement les valeurs :

$$f(0) \quad ; \quad f(2) \quad ; \quad f'(2) \quad ;$$

$$f(4) \quad ; \quad f'(4)$$

2 Déterminer les valeurs de a, b et c à l'aide des valeurs trouvées précédemment.

3 Calculer l'abscisse des points A et B.

■ Exercice 4. Détermination d'une fonction par lecture graphique

★★☆☆☆ R
Corrigé page 93

(Source : 04-derivation-06)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,,$$

où a, b, c et d sont quatre nombres réels.
On sait que :

- le point $A\,(1\,;-1)$ appartient à $\mathscr{C}_f$;
- la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A a pour équation : $y = -2x + 1$;
- $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2 ;
- $f'(0) = -5$

Déterminer les valeurs de a, b, c et d à l'aide de ces informations.

■ Exercice 5. Dérivées de référence

★☆☆☆☆ A
Corrigé page 93

(Source : 04-derivation-01)

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée.

1 $f(x) = 3x - 1$

2 $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$

3 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 3x - 1$

4 $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$

5 $f(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{3}{x}$

6 $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - \dfrac{1}{3}\sqrt{x}$

■ Exercice 6. Dérivées de fonctions produits et quotient

★★☆☆☆ A
Corrigé page 94

(Source : 04-derivation-02)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa dérivée.

1 $f(x) = 2x\sqrt{x}$

2 $f(x) = \dfrac{3x - 1}{4x + 5}$

3 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x}{x^2 + 1}$

4 $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$

5 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + \dfrac{1}{x}}$

■ Exercice 7. Variations de fonctions produits

★★☆☆☆ A
Corrigé page 96

(Source : 04-derivation-07)

Pour chacune des fonctions suivantes,

- Trouver son domaine de définition ;
- Trouver sa dérivée ;
- Trouver son sens de variation sur son domaine de définition ;
- Donner le signe de la fonction sur son domaine de définition.

1 $f(x) = (3x+2)\sqrt{x}$ **2** $g(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x}$

■ Exercice 8. Sens de variation de fonctions quotients

★★☆☆☆ A Corrigé page 98

(Source : 04-derivation-08)

Pour chacune des fonctions suivantes,

- Donner son domaine de définition ;
- Trouver sa dérivée ;
- En déduire ses variations sur son domaine de définition.

1 $f(x) = \dfrac{3x-4}{5x-2}$ **2** $g(x) = \dfrac{5x-3}{x^2-x-2}$ **3** $h(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$

■ Exercice 9. Étude complète de la fonction $x \longmapsto \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$

★★★☆☆ R Corrigé page 100

(Source : 04-derivation-12)

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1 Montrer que la dérivée de la fonction f est donnée par :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}(3-x^2)}{2(x^2+1)^2}.$$

2 Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$, puis en déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

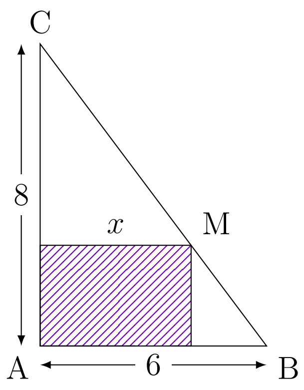
3 Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

■ Exercice 10. Optimisation d'une aire dans un triangle rectangle

★★★★☆ R Corrigé page 101

(Source : 04-derivation-09)

On considère la figure suivante (M est un point de [BC]) :



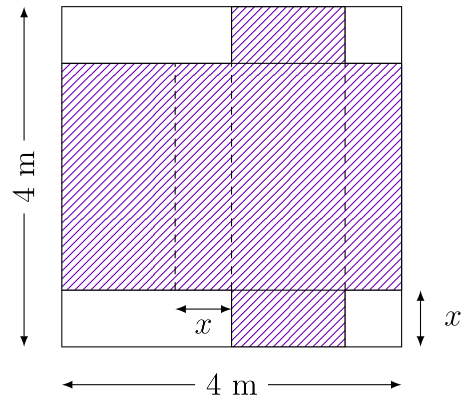
Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle hachuré est optimale.

■ Exercice 11. Optimisation du volume d'une boîte

★★★★☆ R
Corrigé page 102

(Source : 04-derivation-10)

On souhaite construire une boîte parallélépipédique à partir d'un carton carré de 4 mètres de côté, comme l'illustre le schéma suivant :



La partie hachurée correspond à la partie du carton qui va être pliée (aux pointillés) pour obtenir la boîte.

1 Montrer que le volume de la boîte est égal à $f(x) = 2x(2-x)^2$.

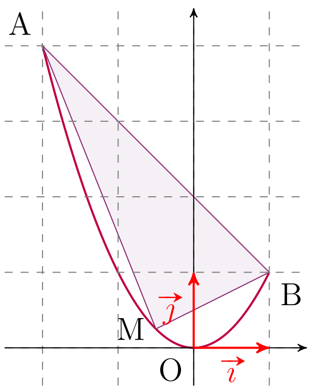
2 Étudier les variations de f, puis en déduire la valeur de x (arrondie au centimètre près) pour laquelle le volume de la boîte est optimal.

■ Exercice 12. Optimisation d'une aire dans une parabole

★★★★☆ R
Corrigé page 103

(Source : 04-derivation-13)

On considère la parabole d'équation $y = x^2$ sur laquelle se trouvent deux points : $\mathrm{A}(-2\,;4)$ et $\mathrm{B}(1\,;1)$.
Soit M un point de cette parabole d'abscisse a, $-2 \leqslant a \leqslant 1$.
On cherche à optimiser l'aire du triangle ABM.



1 Calculer AB.

2 Déterminer une équation de la droite (AB).

3 Soit H le pied de la hauteur du triangle ABM issue du sommet M.

Déterminer une équation de la droite (MH) en fonction de a.

4 Déduire des questions **2** et **3** les coordonnées de H en fonction de a.

5 Justifier qu'optimiser l'aire du triangle ABM revient à optimiser MH^2, et donc à optimiser la fonction f définie par $f(a) = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + 1$.

6 En déduire alors l'abscisse du point M telle que l'aire du triangle ABM soit optimale.

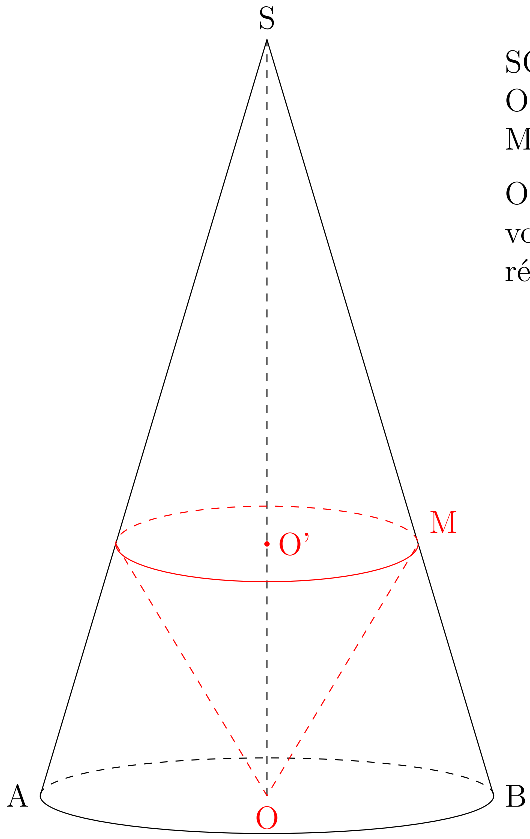
■ Exercice 13. Optimisation du volume d'un cône

★★★★★ R

Corrigé page 104

(Source : 04-derivation-11)

On considère la figure suivante :



SO = 10 cm.
OB = 3 cm.
M est un point mobile sur [SB] tel que MB = x cm.

On cherche à déterminer la valeur de x pour laquelle le volume du cône de sommet O est optimal. Pour cela, répondre aux questions suivantes :

1 Calculer SB.

2 Déterminer en fonction de x le rayon de la base ainsi que la hauteur OO' du cône de sommet O.

3 En notant $f(x)$ le volume du cône de sommet O, montrer que $f(x) = \frac{30\pi}{109\sqrt{109}}x\left(\sqrt{109} - x\right)^2$.

4 Conclure.

Corrigés

13 mai 2016

Corrigé de l'exercice 1.

1 $f(x) = x^2$, $a = 2$.

- Calcul de $f'(2)$.
  Le taux d'accroissement de f en 2 est :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(2+h)^2-2^2}{h} \\ &= \frac{(2+h-2)(2+h+2)}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} \\ &= 4+h.\end{aligned}$$

  Ainsi, le nombre dérivé de f en 2 est :

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est alors :

$$\begin{aligned}&y = f'(a)(x-a)+f(a)\\ &y = f'(2)(x-2)+f(2)\\ &y = 4(x-2)+4\\ &y = 4x-8+4\\ &\boxed{y = 4x-4}\end{aligned}$$

2 $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$.

- Calcul de $f'(1)$.
  Le taux d'accroissement de f en 1 est :

$$
\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}}{h}\\
&= \frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1+h}{1+h}}{h}\\
&= \frac{\frac{-h}{1+h}}{h}\\
&= -\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(1+h)}\\
&= -\frac{1}{1+h}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en 1 est :

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{1+h}\right) = -1.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est alors :

$$
\begin{aligned}
&y = f'(a)(x-a)+f(a)\\
&y = f'(1)(x-1)+f(1)\\
&y = -1(x-1)+1\\
&y = -x+1+1\\
&\boxed{y = -x+2}
\end{aligned}
$$

3 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $a = -1$.

- Calcul de $f'(-1)$.
  Le taux d'accroissement de f en -1 est :

$$
\begin{aligned}
\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} &= \frac{(-1+h)^2-2(-1+h)+3-\big((-1)^2-2\times(-1)+3\big)}{h}\\
&= \frac{h^2-2h+1+2-2h+3-6}{h}\\
&= \frac{h^2-4h}{h}\\
&= \frac{\cancel{h}(h-4)}{\cancel{h}}\\
&= h-4.
\end{aligned}
$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en -1 est :

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}(h-4) = -4.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse -1 est alors :

$$
\begin{aligned}
&y = f'(a)(x-a)+f(a)\\
&y = f'(-1)(x+1)+f(-1)\\
&y = -4(x+1)+6\\
&y = -4x-4+6\\
&\boxed{y = -4x+2}
\end{aligned}
$$

4 $f(x)=\sqrt{x}$, $a=3$.

- Calcul de $f'(3)$.
  Le taux d'accroissement de f en 4 est :

$$\begin{aligned}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} &= \frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h}\\ &= \frac{\left(\sqrt{4+h}-2\right)\left(\sqrt{4+h}+2\right)}{h}\\ &= \frac{h^2-4h}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}\\ &= \frac{4+h-4}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}\\ &= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{4+h}+2\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}.\end{aligned}$$

  Ainsi, le nombre dérivé de f en 4 est :

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}\right)=\frac{1}{4}.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 4 est alors :

$$\begin{aligned}&y=f'(a)(x-a)+f(a)\\ &y=f'(4)(x-4)+f(4)\\ &y=\frac{1}{4}(x-4)+2\\ &y=\frac{1}{4}x-1+2\\ &\boxed{y=\frac{1}{4}x+1}\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

Dans cet exercice, il faut avoir en tête que le nombre dérivé d'une fonction en un point a est le coefficient directeur de la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
Il faut donc, pour chaque question, regarder la tangente à la courbe tracée en rouge au point d'abscisse a donné.

1 Ici, la tangente a pour coefficient directeur 1. Donc $f'(1)=1$.

Ainsi, la tangente tracée a pour équation réduite :

$$\boxed{y=x-1}$$

(N'oublions pas que dans l'équation d'une droite $y=mx+p$, p désigne l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées).

2 Ici, le coefficient directeur de la tangente tracée est $-\frac{1}{2}$. En effet, les points $A(0\,;1)$ et $B(2\,;0)$ sont sur la tangente donc :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

L'équation réduite de la tangente sera alors :

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 1}$$

3 Ici, le coefficient directeur de la tangente est $\frac{1}{2}$, donc $f'(1) = \frac{1}{2}$.

L'équation réduite de la tangente sera alors :

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$$

4 Ici, la tangente est horizontale donc son coefficient directeur est égal à 0.

L'équation de la tangente est alors :

$$\boxed{y = -1}$$

Corrigé de l'exercice 3.

1
- $f(0) = -1$;
- $f(2) = 1$;
- $f'(2) = 0$ car la fonction atteint un maximum pour $x = 2$;
- $f(4) = -1$;
- $f'(4) = -2$ (c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4).

2
- $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$; donc $c = -1$ d'après la question précédente (1^{er} point).
- $f'(x) = 2ax + b$ et $f'(2) = 4a + b$; donc $4a + b = 0$, soit $b = -4a$.
- $f(2) = 1$ donc $4a + 2b - 1 = 1$, soit $-b + 2b = 2$ d'après le point précédent. Ainsi, $b = 2$.
- $f'(4) = 8a + b = -2$ donc $8a = -4$, soit $b = -\frac{1}{2}$.

Finalement, on a : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$.

3 L'abscisse des points A et B sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$$\Delta = 2^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) = 4 - 2 = 2.$$

Ainsi,

$$x_B = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad\qquad x_A = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_B = \frac{-2-\sqrt{2}}{-1} \qquad\qquad x_A = \frac{-2+\sqrt{2}}{-1}$$

$$\underline{x_B = 2+\sqrt{2}} \qquad\qquad \underline{x_A = 2-\sqrt{2}}$$

■ Corrigé de l'exercice 4.

1
- $A\,(1\,;-1) \in \mathscr{C}_f$ donc $f(1) = -1$, soit :

$$a+b+c+d = -1 \tag{IV.1}$$

- la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A a pour équation : $y = -2x+1$ donc $f'(1) = -2$, soit :

$$3a+2b+c = -2 \tag{IV.2}$$

- $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2 donc $f(0) = 2$, d'où :

$$d = 2.$$

- $f'(0) = -5$ et $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$ donc :

$$c = -5.$$

Les équations IV.1 et IV.2 donnent alors le système suivant :

$$\begin{cases} a+b = -1-(-5)-2 = 2 \\ 3a+2b = -2-(-5) = 3 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} a = 2-b \\ 3(2-b)+2b = 3 \end{cases}$$

La seconde équation donne alors :

$$6-b = 3 \qquad \text{soit :} \qquad b = 3.$$

La première équation donne alors :

$$a = 2-3 = -1.$$

On obtient finalement :

$$\boxed{f(x) = -x^3+3x^2-5x+2.}$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

1 $f(x) = 3x-1$ donc $f'(x) = 3$.

2 $f(x) = 5x^2+3x-1$ donc $f'(x) = 10x+3$.

3 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-5x^2+3x-1$ donc $f'(x)=x^2-10x+3$.

4 $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ donc $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

5 $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{3}{x}$ donc $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x^2}$.

6 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{3}\sqrt{x}$ donc $f'(x)=-x+3-\frac{1}{6\sqrt{x}}$.

Corrigé de l'exercice 6.

1 $f(x)=2x\sqrt{x}$. On pose :

$u(x)=2x$ $\qquad$ $v(x)=\sqrt{x}$

$u'(x)=2$ $\qquad$ $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

On a alors :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\\
&= 2\sqrt{x}+2x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\\
&= 2\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{x}}\\
&= 2\sqrt{x}+\frac{\cancel{\sqrt{x}}\times\sqrt{x}}{\cancel{\sqrt{x}}}\\
&= 2\sqrt{x}+\sqrt{x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)=3\sqrt{x}}$$

2 $f(x)=\frac{3x-1}{4x+5}$. On pose :

$u(x)=3x-1$ $\qquad$ $v(x)=4x+5$

$u'(x)=3$ $\qquad$ $v'(x)=4$

On a alors :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}\\
&= \frac{3(4x+5)-4(3x-1)}{(4x+5)^2}\\
&= \frac{12x+15-12x+4}{(4x+5)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{19}{(4x+5)^2}}$$

3 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x}{x^2 + 1}$. On pose :

$u(x) = \sqrt{x} - x$ $\qquad$ $v(x) = x^2 + 1$

$u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1$ $\qquad$ $v'(x) = 2x$

On a alors :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} \\
&= \frac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) \times (x^2+1) - (\sqrt{x} - x) \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} \\
&= \frac{\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}} - x^2 - 1 - 2x\sqrt{x} + 2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \\
&= \frac{\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}} + x^2 - 2x\sqrt{x} - 1}{\left(x^2+1\right)^2} \\
&= \frac{\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{2x^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4x^2}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\left(x^2+1\right)^2} \\
&= \frac{\dfrac{2x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3x^2 + 1}{2\sqrt{x}}}{\left(x^2+1\right)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3x^2 + 1}{2\sqrt{x}\left(x^2+1\right)^2}}$$

4 $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$. On pose :

$u(x) = x^2 - 3x + 1$ $\qquad$ $v(x) = x - 3$

$u'(x) = 2x - 3$ $\qquad$ $v'(x) = 1$

On a donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} \\
&= \frac{(2x-3)(x-3) - (x^2 - 3x + 1) \times 1}{(x-3)^2} \\
&= \frac{2x^2 - 6x - 3x + 9 - x^2 + 3x - 1}{(x-3)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}}$$

5 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + \dfrac{1}{x}}$.

On commence par simplifier l'écriture de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\frac{x^2+1}{x}} \\ &= \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}. \end{aligned}$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} u(x) &= x\sqrt{x} \\ u'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{\cancel{\sqrt{x}} \times \sqrt{x}}{2\cancel{\sqrt{x}}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x) &= x^2 + 1 \\ v'(x) &= 2x \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x^2+1) - x\sqrt{x} \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}x^2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} - 2x^2\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}\left(3 - x^2\right)}{(x^2+1)^2}}$$

■ Corrigé de l'exercice 7.

1 $f(x) = (3x+2)\sqrt{x}$.

- Le domaine de définition de f est : $\mathscr{D}_f = [0\,;+\infty[$.
- f est de la forme uv avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 3x + 2 \\ u'(x) &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x) &= \sqrt{x} \\ v'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
&= 3\sqrt{x} + (3x+2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= 3\sqrt{x} + \frac{3x+2}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{3x+2}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{6x+3x+2}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{9x+2}{2\sqrt{x}}}$$

- $f'(x) > 0 \iff 9x + 2 > 0$ car $2\sqrt{x} > 0$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.
  Ainsi, $f'(x) > 0 \iff x > -\dfrac{2}{9}$, d'où le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

- D'après le tableau de variation de f, on peut dire que $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$.

2 $g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x}$.

- Le domaine de définition de g est $\mathscr{D}_g =]0\,;+\infty[$.
- g est de la forme uv avec :

$u(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $v(x) = \sqrt{x}$

$u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc :

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
&= -\frac{1}{x^2}\sqrt{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= -\frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= -\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{x \times \sqrt{x} \times \cancel{\sqrt{x}}} + \frac{x+1}{2x\sqrt{x}} \\
&= -\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{x+1}{2x\sqrt{x}} \\
\end{aligned}
$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}}$$

- $g'(x) > 0 \Longleftrightarrow x - 1 > 0 \Longleftrightarrow x > 1$ car $2x\sqrt{x} > 0$ sur $\mathscr{D}_g$.
  On a alors le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\Vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

- D'après le tableau de variation de g, on peut dire que $g(x) \geqslant 2$ sur $]0\,;+\infty[$, donc $g(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

■ Corrigé de l'exercice 8.

1 $f(x) = \dfrac{3x-4}{5x-2}$.

- $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{5}\right\}$.
- f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

  $u(x) = 3x - 4$ $\qquad\qquad$ $v(x) = 5x - 2$
  $u'(x) = 3$ $\qquad\qquad$ $v'(x) = 5$

  Ainsi,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\
&= \frac{3(5x-2) - 5(3x-4)}{(5x-2)^2} \\
&= \frac{15x - 6 - 15x + 20}{(5x-2)^2} \\
\end{aligned}
$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{14}{(5x-2)^2}}$$

- $f'(x) > 0$ pour tout réel $x \in \mathscr{D}_f$ donc :

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

2 $g(x) = \dfrac{5x-3}{x^2-x-2}$.

- Une racine évidente de $x^2 - x - 2$ est $x_1 = 2$. De plus, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ donc $2x_2 = -2$, soit $x_2 = -1$.
  Ainsi, $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1 \ ; \ 2\}$.
- f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

  $u(x) = 5x - 3$ $\qquad$ $v(x) = x^2 - x - 2$
  $u'(x) = 5$ $\qquad$ $v'(x) = 2x - 1$

  Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{5(x^2-x-2) - (5x-3)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} \\ &= \frac{5x^2 - 5x - 10 - 10x^2 + 5x + 6x + 3}{(x^2-x-2)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{-5x^2+6x-7}{(x^2-x-2)^2}}$$

- $g'(x)$ est du signe de $-5x^2 + 6x - 7$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 36 - 140 = -104 < 0.$$

  D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	‖ $-$	‖ $-$	
$g(x)$	$\searrow$	‖ $\searrow$	‖ $\searrow$	

3 $h(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$.

- $x^2 - 3x + 2$ possède $\alpha = 1$ comme racine évidente, donc la seconde racine est $\beta = 2$.
  Ainsi, $\mathscr{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{1 \ ; \ 2\}$.
- f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

$u(x) = x^2 + x + 1$ $\qquad\qquad$ $v(x) = x^2 - 3x + 2$

$u'(x) = 2x + 1$ $\qquad\qquad$ $v'(x) = 2x - 3$

D'où :

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\
&= \frac{(2x+1)(x^2-3x+2) - (x^2+x+1)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} \\
&= \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x + x^2 - 3x + 2 - (2x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 3x + 2x - 3)}{(x^2-3x+2)^2} \\
&= \frac{2x^3 - 5x^2 + x + 2 - 2x^3 + x^2 + x + 3}{(x^2-3x+2)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{-4x^2 + 2x + 5}{(x^2-3x+2)^2}}$$

- $h'(x)$ est du signe de $-4x^2 + 2x + 5$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 4 + 80 = 84.$$

Ses deux racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{84}}{-8} = \frac{-2+2\sqrt{21}}{-8} = \frac{1-\sqrt{21}}{4} \approx -0,9 < \alpha$$

et

$$x_2 = \frac{-2-\sqrt{84}}{-8} = \frac{-2-2\sqrt{21}}{-8} = \frac{1+\sqrt{21}}{4} \approx 1,4 \in \left]\alpha\,;\beta\right[= \left]1\,;2\right[.$$

On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		$\alpha = 1$		x_2		$\beta = 2$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$h(x)$		↘		↗	||	↗		↘	||	↘	

■ Corrigé de l'exercice 9.

1 f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x\sqrt{x}$ et $v(x) = x^2 + 1$.

u est une fonction produit gh avec $g(x) = x$ et $h(x) = \sqrt{x}$, donc $u = g'h + h'g$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
u'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \\
&= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} \\
&= \frac{3}{2}\sqrt{x}
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2}(x) \\ &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x^2+1) - x\sqrt{x} \times 2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(x^2+1) - 4x^2\sqrt{x}}{2(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\sqrt{x}(3-x^2)}{2(x^2+1)^2}}$$

2 $2(x^2+1)^2 > 0$ et $\sqrt{x} \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$. Par conséquent, $f'(x)$ est du signe de $3 - x^2$, polynôme de degré 2 admettant pour racines $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ et dont le coefficient de x^2 est négatif, d'où le tableau suivant :

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

3 L'équation réduite d'une tangente est donnée par la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, avec ici $a = 1$.
$f(a) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(a) = \dfrac{1}{4}$ donc l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est :

$$y = \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{2}$$

soit $\boxed{y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}}$

Corrigé de l'exercice 10.

- x désigne a priori la longueur du rectangle hachuré. On voit alors que $x \in [0\,;6]$.
- Notons h la largeur du rectangle ; d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{6-x}{6} = \frac{h}{8}$$

donc

$$h = \frac{8(6-x)}{6} = \frac{24-4x}{3} = 8 - \frac{4}{3}x.$$

L'aire du rectangle hachuré est alors :

$$a(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 8x = x\left(8 - \frac{4}{3}x\right).$$

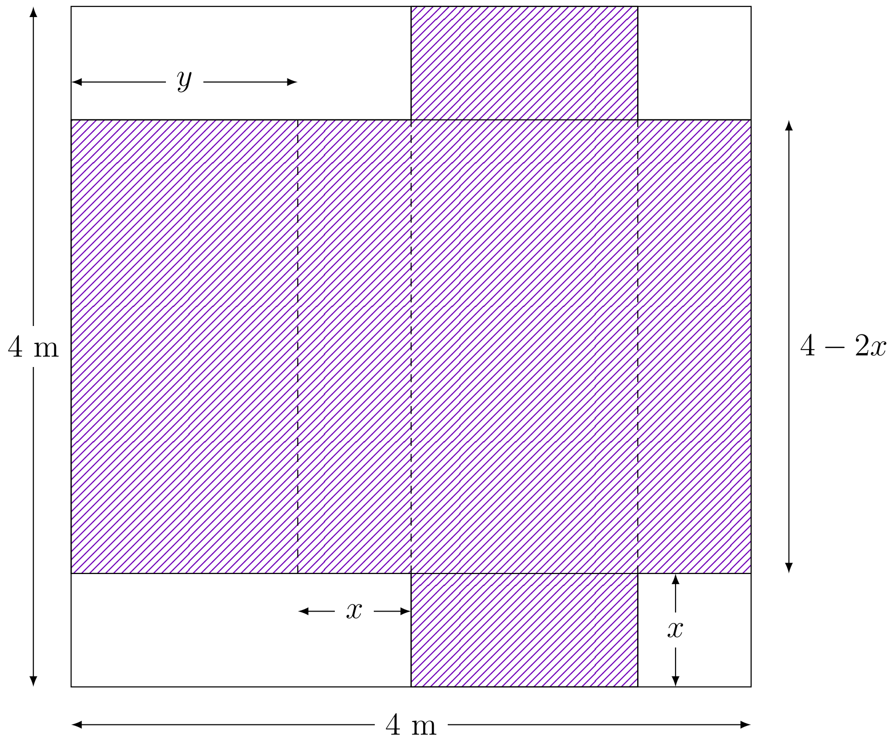
a est donc un polynôme de degré 2 dont la courbe représentative est une parabole dont les branches sont dirigées vers le bas (car le coefficient de x^2 est négatif).

Par conséquent, le maximum de a est atteint pour $x = -\dfrac{8}{2 \times \left(-\frac{4}{3}\right)} = 3$.

L'aire du rectangle hachuré est donc optimale pour $x = 3$.

■ Corrigé de l'exercice 11.

1 Notons y la largeur d'une face de la boîte :



Alors,

$$y + x + y + x = 4\ ,$$

soit :

$$y = 2 - x.$$

Le volume de la boîte est alors :

$$f(x) = x \times (4 - 2x) \times y$$

$$\boxed{f(x) = 2x(2 - x)^2}$$

2 $f(x) = 2x(4 - 4x + x^2) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$.
Ainsi, $f'(x) = 6x^2 - 16x + 8$, dont le discriminant est $\Delta = 16^2 - 4 \times 6 \times 8 = 64$. $f'(x)$ admet donc deux racines : $\alpha = \dfrac{16 - \sqrt{64}}{12} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$ et $\beta = \dfrac{16 + 8}{12} = 2$. On a alors :

x	0		$\frac{2}{3}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Notons que x ne peut pas dépasser la valeur 2 car il faut que $4 - 2x \geqslant 0$, soit $2x \leqslant 4$, d'où $x \leqslant 2$.

Le maximum de f est atteint en $x = \dfrac{2}{3}$ (exprimé en mètre).

<u>Le volume de la boîte est optimal pour $x = 67$ cm.</u>

■ Corrigé de l'exercice 12.

1 $$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(1+2)^2 + (1-4)^2} \\ &= \sqrt{9+9} \\ &= \sqrt{9 \times 2} \\ &\boxed{= 3\sqrt{2}}\end{aligned}$$

2 Le coefficient directeur de (AB) est : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3}{-3} = -1$. Ainsi, l'équation réduite de (AB) est : $y = -x + p$.

$\mathrm{B} \in (\mathrm{AB})$ donc $y_B = -x_A + p$, soit $1 = -1 + p$. Donc $p = 2$.

<u>Ainsi, (AB) : $y = -x + 2$.</u>

3 (MH) : $y = mx + p$ est perpendiculaire à (AB) donc le produit de m et du coefficient directeur de (AB) doit être égal à -1, soit $m = 1$. Ainsi, (MH) : $y = x + p$, avec $y_M = x_M + p$, soit $p = y_M - x_M = a^2 - a$.

<u>Ainsi, (MH) : $y = x + a^2 - a$.</u>

4 H est le point d'intersection de (AB) et (MH) donc $y_H = -x_H + 2$ (car $\mathrm{H} \in (\mathrm{AB})$) et $y_H = x_H + a^2 - a$ (car $\mathrm{H} \in (\mathrm{MH})$).

Donc $-x_H + 2 = x_H + a^2 - a$, soit $2x_H = 2 - a^2 + a$ ou encore $x_H = 1 - \dfrac{1}{2}(a^2 - a)$.

On en déduit alors que $y_H = -x_H + 2 = \dfrac{1}{2}(a^2 - a) - 1 + 2 = 1 + \dfrac{1}{2}(a^2 - a)$.

5 L'aire de ABM est égale à $\dfrac{\mathrm{AB} \times \mathrm{MH}}{2}$.

AB étant constante, optimiser l'aire de ABM revient à optimiser MH, et donc MH^2.

$$\begin{aligned}\mathrm{MH}^2 &= (x_H - x_M)^2 + (y_M - y_H)^2 \\ &= \left[1 - \frac{1}{2}(a^2 - a) - a\right]^2 + \left[1 + \frac{1}{2}(a^2 - a) - a^2\right]^2 \\ &= \left[1 - \frac{1}{2}(a^2 + a)\right]^2 + \left[1 - \frac{1}{2}(a^2 - a) + a\right]^2 \\ &= 2\left[1 - \frac{1}{2}(a^2 + a)\right]^2\end{aligned}$$

Donc optimiser MH^2 revient à optimiser $f(a) = 1 - \dfrac{1}{2}(a^2 + a)$, soit en développant : $f(a) = -\dfrac{1}{2}a^2 - \dfrac{1}{2}a + 1$.

6 f est un polynôme du second degré, où le coefficient du terme de degré 2 est négatif ; donc f admet un maximum pour $a = -\dfrac{-\frac{1}{2}}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\dfrac{1}{2}$.

<u>Ainsi, l'aire de ABM est optimale lorsque l'abscisse de M est $-\dfrac{1}{2}$.</u>

■ Corrigé de l'exercice 13.

1 Dans le triangle BOS rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore,

$$\mathrm{SB}^2 = \mathrm{SO}^2 + \mathrm{OB}^2 \ ,$$

donc :

$$\boxed{\mathrm{SB} = \sqrt{109}}$$

2 (O'M) // (OB) donc le théorème de Thalès nous permet d'écrire :

$$\frac{\mathrm{SO}'}{\mathrm{SO}} = \frac{\mathrm{SM}}{\mathrm{SB}} = \frac{\mathrm{O'M}}{\mathrm{OB}} \ ,$$

soit :

$$\frac{\mathrm{SO}'}{10} = \frac{\sqrt{109}-x}{\sqrt{109}} = \frac{\mathrm{O'M}}{3} \ ,$$

On peut donc dire d'une part que :

$$\boxed{\mathrm{O'M} = \frac{3\left(\sqrt{109}-x\right)}{\sqrt{109}}} \qquad \text{(rayon de la base du cône)}$$

et d'autre part :

$$\mathrm{SO'} = \frac{10\left(\sqrt{109}-x\right)}{\sqrt{109}}$$

donc la hauteur du cône est :

$$\begin{aligned} h(x) &= 10 - \frac{10\left(\sqrt{109}-x\right)}{\sqrt{109}} \\ &= \frac{10\sqrt{109} - 10\sqrt{109} + 10x}{\sqrt{109}} \end{aligned}$$

$$\boxed{h(x) = \frac{10}{\sqrt{109}}x}$$

3 Le volume d'un cône est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

donc :

$$f(x) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3\left(\sqrt{109}-x\right)}{\sqrt{109}}\right)^2 \times \frac{10}{\sqrt{109}}x$$

$$\boxed{f(x) = \frac{30\pi}{109\sqrt{109}}x\left(\sqrt{109}-x\right)^2}$$

4 Optimiser $f(x)$ équivaut à optimiser la fonction g définie par :

$$\begin{aligned} g(x) &= x\left(\sqrt{109}-x\right)^2 = \\ &= x(109 - 2\sqrt{109}x + x^2) \\ &= x^3 - 2\sqrt{109}x^2 + 109x. \end{aligned}$$

On a :

$$g'(x) = 3x^2 - 4\sqrt{109}x + 109.$$

Le discriminant de $g'(x)$ est :

$$\Delta = \left(4\sqrt{109}\right)^2 - 4 \times 3 \times 109 = 436 = \left(2\sqrt{109}\right)^2.$$

Donc ses racines sont :

$$\alpha = \frac{4\sqrt{109} - 2\sqrt{109}}{6} = \frac{\sqrt{109}}{3}$$

et

$$\beta = \frac{4\sqrt{109} + 2\sqrt{109}}{6} = \sqrt{109}.$$

On a alors le tableau suivant :

x	0		α		$\sqrt{109}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0
$g(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Ainsi, le volume est optimal lorsque M est au tiers de [SB] en partant de B.