Équations & inéquations

Énoncés

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Exercice 1. Équations diverses

★★☆☆☆ A

Corrigé page 23

(Source : sec-eqineq-01)

Résoudre les équations suivantes :

1 $-3x+7=0$

2 $\frac{3}{5}x-6=0$

3 $-\frac{2}{7}x+\frac{1}{2}=\frac{2}{21}x+2$

4 $(-3x+1)(5x-7)=0$

5 $\left(-\frac{1}{2}x-5\right)\left(\frac{3}{4}x+2\right)=0$

6 $2x(5x-1)(2x+3)=0$

7 $\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}$

8 $\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2x}{x-1}$

9 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=2$

10 $\frac{2}{x-1}=1-\frac{x}{x+1}$

Exercice 2. Équations avec carrés

★★☆☆☆ A

Corrigé page 25

(Source : sec-eqineq-04)

Résoudre les équations suivantes :

1 $(3x-5)^2=16$

2 $\left(x^2-4\right)^2=81$

3 $\left(3x^2-4\right)^2=9$

4 $\left(\frac{2x-1}{x-7}\right)^2=25$

Exercice 3. Équations avec racines carrées

★★★☆☆ A

Corrigé page 27

(Source : sec-eqineq-05)

Résoudre les équations suivantes :

1 $\sqrt{3x-2}=7.$

2 $\sqrt{\frac{5x-4}{3x+1}}=3.$

3 $\sqrt{x^2+x+1}=x+1.$

4 $x\sqrt{7}+\sqrt{2}=\sqrt{7}-x\sqrt{2}.$

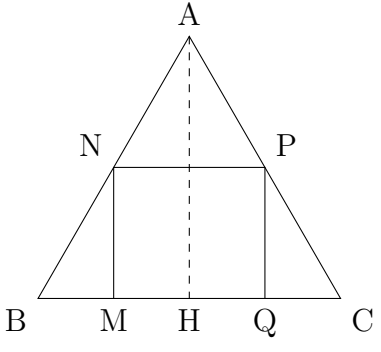
5 $\sqrt{(x-2)(3x+4)}=2(3x+4).$

■ Exercice 4. Dans un triangle équilatéral

★★★☆☆ R

Corrigé page 30

(Source : sec-eqineq-03)



Soit ABC un triangle équilatéral tel que AB = 6 et soit H le milieu de [BC].
M est un point de [BH]. On place les points N et P respectivement sur [AB] et [AC] tels que MNPQ soit un rectangle d'axe de symétrie (AH).
On pose BM = x.

1 *a.* Exprimer MN en fonction de x.

b. Justifier que MQ = $6 - 2x$.

2 On veut que MNPQ soit un carré.

a. Montrer alors que $x\sqrt{3} = 6 - 2x$.

b. Calculer x.

Corrigés

2 septembre 2016

■ Corrigé de l'exercice 1.

1 $-3x+7=0$

$\Leftrightarrow -3x=-7$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-7}{-3}$

$\Leftrightarrow \boxed{x=\dfrac{7}{3}}$

2 $\dfrac{3}{5}x-6=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{5}x=6$

$\Leftrightarrow x=6\times\dfrac{5}{3}$

$\Leftrightarrow \boxed{x=10}$

3 $-\dfrac{2}{7}x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{21}x+2$

$\Leftrightarrow -\dfrac{2}{7}x-\dfrac{2}{21}x=2-\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{8}{21}x=\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{21}{8}\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{x=-\dfrac{63}{16}}$

4 $(-3x+1)(5x-7)=0$

$\Leftrightarrow -3x+1=0$ ou $5x-7=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$ ou $x=\dfrac{7}{5}$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\left\{\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{7}{5}\right\}}$

5 $\left(-\frac{1}{2}x-5\right)\left(\frac{3}{4}x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x-5=0$ ou $\frac{3}{4}x+2=0$

$\Leftrightarrow x=-10$ ou $x=-\frac{8}{3}$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\left\{-10\ ;\ -\frac{8}{3}\right\}}$

6 $2x(5x-1)(2x+3)=0$

$\Leftrightarrow 2x=0$ ou $5x-1=0$ ou $2x+3=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{1}{5}$ ou $x=-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\left\{0\ ;\ \frac{1}{5}\ ;\ -\frac{3}{2}\right\}}$

7 $\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-4},\ x\neq -2$ et $x\neq 2$

$\Leftrightarrow \frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x^2-4},\ x\neq -2$ et $x\neq 2$

$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x^2-4}=\frac{1}{x^2-4},\ x\neq -2$ et $x\neq 2$

$\Leftrightarrow x-2=1,\ x\neq 2$ et $x\neq -2$

$\Leftrightarrow \boxed{x=3}$

8 $\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2x}{x-1},\ x\neq 1$

$\Leftrightarrow x^2+1=2x,\ x\neq 1$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0,\ x\neq 1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0,\ x\neq 1$

$\Leftrightarrow x=1,\ x\neq 1$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\varnothing}$

9 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=2,\ x\neq 0$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x(x+1)}+\frac{x}{x(x+1)}=\frac{2x(x+1)}{x(x+1)},\ x\neq 0$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow x+1+x=2x(x+1),\ x\neq 0$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow 2x+1=2x^2+2x,\ x\neq 0$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2},\ x\neq 0$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}}$

10 $\dfrac{2}{x-1} = 1 - \dfrac{x}{x+1}$, $x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$, $x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\Leftrightarrow 2(x+1) = x^2 - 1 - x(x-1)$, $x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\Leftrightarrow 2x + 2 = x^2 - 1 - x^2 + x$, $x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\Leftrightarrow 2x + 2 - x^2 + 1 + x^2 - x = 0$, $x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0$, $x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\Leftrightarrow x = -3$, $x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\Leftrightarrow \boxed{S = \{-3\}}$

■ Corrigé de l'exercice 2.

1 $(3x-5)^2 = 16 \iff \begin{cases} 3x - 5 = 4 \\ \text{ou} \\ 3x - 5 = -4 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3x = 9 \\ \text{ou} \\ 3x = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

On a alors : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{3 \,;\, \dfrac{1}{3}\right\}}$.

2 $\left(x^2-4\right)^2 = 81 \iff \begin{cases} x^2 - 4 = 9 \\ \text{ou} \\ x^2 - 4 = -9 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2 = 13 \\ \text{ou} \\ x^2 = -5 \end{cases}$ $\longleftarrow$ impossible car $x^2 \geqslant 0$

$\iff \begin{cases} x = \sqrt{13} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{13} \end{cases}$

On a alors : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{13} \,;\, \sqrt{13}\right\}}$.

3 $\left(3x^2-4\right)^2 = 9 \iff \begin{cases} 3x^2-4=3 \\ \text{ou} \\ 3x^2-4=-3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3x^2=7 \\ \text{ou} \\ 3x^2=1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2=\dfrac{7}{3} \\ \text{ou} \\ x^2=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{7}{3}} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{\dfrac{7}{3}} \\ \text{ou} \\ x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

On a alors : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\sqrt{\dfrac{7}{3}}\,;-\sqrt{\dfrac{7}{3}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}}$.

4 $\left(\dfrac{2x-1}{x-7}\right)^2 = 25 \iff \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-7}=5 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1}{x-7}=-5 \end{cases} \\ x-7\neq 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-7}-5=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1}{x-7}+5=0 \end{cases} \\ x\neq 7 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-7}-\dfrac{5(x-7)}{x-7}=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1}{x-7}+\dfrac{5(x-7)}{x-7}=0 \end{cases} \\ x\neq 7 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-7}-\dfrac{5x-35}{x-7}=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1}{x-7}+\dfrac{5x-35}{x-7}=0 \end{cases} \\ x\neq 7 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{2x-1-5x+35}{x-7}=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1+5x-35}{x-7}=0 \end{cases} \\ x\neq 7 \end{cases}$

$$\left(\frac{2x-1}{x-7}\right)^2 = 25 \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x-1-5x+35=0 \\ \text{ou} \\ 2x-1+5x-35=0 \end{pmatrix} \\ x \neq 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} -3x+34=0 \\ \text{ou} \\ 7x-36=0 \end{pmatrix} \\ x \neq 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x=\dfrac{34}{3} \\ \text{ou} \\ x=\dfrac{36}{7} \end{pmatrix} \\ x \neq 7 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{36}{7}\,;\frac{34}{3}\right\}}$.

■ Corrigé de l'exercice 3.

1 $\sqrt{3x-2} = 7 \iff \begin{cases} 3x-2 \geqslant 0 \\ 3x-2 = 7^2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 3x \geqslant 2 \\ 3x = 49+2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geqslant \dfrac{2}{3} \\ x = \dfrac{51}{3} = 17 \end{cases}$$

$17 \geqslant \frac{2}{3}$ donc l'ensemble solution de l'équation est : $\boxed{\mathscr{S} = \{17\}}$.

2 $\sqrt{\dfrac{5x-4}{3x+1}} = 3 \iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ 3x+1 \neq 0 \\ \dfrac{5x-4}{3x+1} = 9 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5x-4}{3x+1} - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5x-4}{3x+1} - \dfrac{9(3x+1)}{3x+1} = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{5x-4}{3x+1}} = 3 \iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5x-4-27x-9}{3x+1} = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-22x-13}{3x+1} = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ -22x-13 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ x = -\dfrac{13}{22} \end{cases}$$

On calcule maintenant $\dfrac{5x-4}{3x+1}$ pour $x = -\dfrac{13}{22}$ afin de voir si cette solution est valable :

$$\frac{5x-4}{3x+1} = 9 > 0.$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{13}{22}\right\}}$.

3 $\sqrt{x^2+x+1} = x+1 \iff \begin{cases} x^2+x+1 \geqslant 0 \\ x+1 \geqslant 0 \\ x^2+x+1 = (x+1)^2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x^2+x+1 \geqslant 0 \\ x \geqslant -1 \\ x^2+x+1 = x^2+2x+1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2+x+1 \geqslant 0 \\ x \geqslant -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

On vérifie que $x^2+x+1 \geqslant 0$ pour $x = 0$ (assez facilement) donc $\boxed{\mathscr{S} = \{0\}}$.

4 $x\sqrt{7}+\sqrt{2}=\sqrt{7}-x\sqrt{2} \iff x\sqrt{7}+x\sqrt{2}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$

$$\iff x\big(\sqrt{7}+\sqrt{2}\big)=\sqrt{7}-\sqrt{2}$$

$$\iff x=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$$

$$\iff x=\frac{\big(\sqrt{7}-\sqrt{2}\big)\big(\sqrt{7}-\sqrt{2}\big)}{\big(\sqrt{7}+\sqrt{2}\big)\big(\sqrt{7}-\sqrt{2}\big)}$$

$$\iff x=\frac{\big(\sqrt{7}\big)^2-2\sqrt{7}\times\sqrt{2}+\big(\sqrt{2}\big)^2}{\big(\sqrt{7}\big)^2-\big(\sqrt{2}\big)^2}$$

$$\iff x=\frac{9-2\sqrt{14}}{5}.$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{9-2\sqrt{14}}{5}\right\}}$.

5 $\sqrt{(x-2)(3x+4)}=2(3x+4) \iff \begin{cases} 2(3x+4)\geqslant 0 \\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0 \\ (x-2)(3x+4)=\big[2(3x+4)\big]^2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 3x+4\geqslant 0 \\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0 \\ (x-2)(3x+4)=4(3x+4)^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x\geqslant -4 \\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0 \\ (x-2)(3x+4)-4(3x+4)^2=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\geqslant -4/3 \\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0 \\ (3x+4)\big[(x-2)-4(3x+4)\big]=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\geqslant -4/3 \\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0 \\ (3x+4)(x-2-12x-16)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\geqslant -4/3 \\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0 \\ (3x+4)(-11x-18)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\geqslant -4/3 \\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0 \\ \begin{pmatrix} 3x+4=0 \\ \text{ou} \\ -11x-18=0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\sqrt{(x-2)(3x+4)} = 2(3x+4) \iff \begin{cases} x \geqslant -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geqslant 0 \\ \left(\begin{array}{l} x = -\dfrac{4}{3} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{18}{11} \end{array} \right. \end{cases}$$

On regarde maintenant si $(x-2)(3x+4) \geqslant 0$ pour $x = -\dfrac{4}{3}$ et pour $x = -\dfrac{18}{11}$.

Pour $x = -\dfrac{4}{3}$, on obtient 0, donc cette valeur convient.

Pour $x = -\dfrac{18}{11}$, on obtient $\dfrac{400}{121} > -\dfrac{4}{3}$ donc cette valeur convient.

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{4}{3}\ ;\ -\dfrac{18}{11}\right\}}$.

■ Corrigé de l'exercice 4.

1 *a.* Dans le triangle équilatéral ABC, $\widehat{\text{ABC}} = 60°$.
Dans le triangle NBM rectangle en M,

$$\tan \widehat{\text{NBM}} = \frac{NM}{BM}$$

donc :

$$\tan 60° = \frac{NM}{x}.$$

On a donc :

$$\boxed{MN = x \tan 60° = x\sqrt{3}}$$

b. Par symétrie, $BM = QC = x$ et $MH = HQ = 3 - x$.
Donc, $MQ = 2 \times (3-x)$, soit $\boxed{MQ = 6 - 2x}$.

2 On veut que MNPQ soit un carré.

a. La condition mène à l'égalité :

$$MQ = MN$$

c'est-à-dire, d'après la question 1 :

$$\boxed{x\sqrt{3} = 6 - 2x}$$

b. Si $x\sqrt{3} = 6 - 2x$, alors $x\sqrt{3} + 2x = 6$.
Ainsi, $\left(\sqrt{3}+2\right)x = 6$, soit :

$$\boxed{x = \frac{6}{2+\sqrt{3}}}$$

N.B. On aurait pu mettre le résultat de sorte que le dénominateur ne comporte pas de radical, comme il est de coutume de faire :

$$\begin{aligned}\frac{6}{2+\sqrt{3}} &= \frac{6\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{12-6\sqrt{3}}{4-3} \\ &= 12-6\sqrt{3}\end{aligned}$$

et on peut aussi s'assurer que $x < 3$ en trouvant une valeur approchée :

$$x \approx 1,6.$$