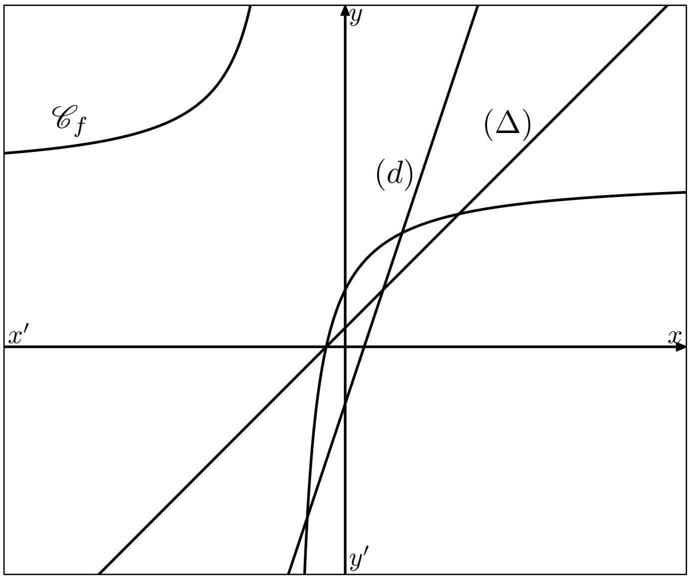
Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$$

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ donné ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



1. Déterminer l'équation réduite de la droite (d) passant par les deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant respectivement pour abscisses $-\dfrac{2}{3}$ et 1.

2. On considère la droite (Δ) ayant pour équation réduite :
$$(\Delta):\quad y = x + \frac{1}{3}$$

   a. Etablir la factorisation suivante :
   $$-3x^2+5x+2 = (2-x)(3x+1)$$

   b. Résoudre algébriquement l'inéquation :
   $$f(x) \leqslant x + \frac{1}{3}$$

   c. En déduire la positition relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ relativement à la droite (Δ) sur $\mathbb{R}$.

Correction 1

1. Par la fonction f, on a les images suivantes :

- $f\Big(-\dfrac{2}{3}\Big) = \dfrac{3\times\Big(-\dfrac{2}{3}\Big)+1}{-\dfrac{2}{3}+1} = \dfrac{-2+1}{\dfrac{1}{3}} = -1\times\dfrac{3}{1} = -3$
- $f(1) = \dfrac{3\times1+1}{1+1} = \dfrac{4}{2} = 2$

Ainsi, les deux points énoncés ont pour coordonnées :

$$A\Big(-\frac{2}{3}\,;-3\Big)\quad ;\quad B(1\,;2)$$

Le coefficient directeur de la droite (d) passant par ces deux points a pour valeur :

$$a = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{2-(-3)}{1-\Big(-\dfrac{2}{3}\Big)} = \frac{2+3}{1+\dfrac{2}{3}} = \frac{5}{\dfrac{5}{3}}$$
$$= 5\times\frac{3}{5} = 3$$

Ainsi, l'équation réduite de la droite (d) a pour expression :

$$y = 3x+b \qquad \text{où } b\in\mathbb{R}$$

Le point B appartenant à la droite (d), ses coordonnées vérifient son équation réduite :

$$2 = 3\times1+b$$
$$2 = 3+b$$
$$b = 2-3$$
$$b = -1$$

Ainsi, la droite (d) admet pour équation réduite :

$$y = 3x-1$$

2. a. On a le développement suivant :
$$(2-x)(3x+1) = 6x+2-3x^2-x = -3x^2+5x+2$$

   b. Résolvons l'inéquation ci-dessous :
$$f(x) \leqslant x+\frac{1}{3}$$
$$\frac{3x+1}{x+1} - x - \frac{1}{3} \leqslant 0$$
$$\frac{3x+1}{x+1} - \frac{3x+1}{3} \leqslant 0$$
$$\frac{3(3x+1)}{3(x+1)} - \frac{(3x+1)(x+1)}{3(x+1)} \leqslant 0$$
$$\frac{(9x+3)-(3x^2+3x+x+1)}{3(x+1)} \leqslant 0$$
$$\frac{9x+3-3x^2-3x-x-1}{3(x+1)} \leqslant 0$$
$$\frac{-3x^2+5x+2}{3(x+1)} \leqslant 0$$

A l'aide de la question a. :
$$\frac{(2-x)(3x+1)}{3(x+1)} \leqslant 0$$

En étudiant les facteurs du premier degré, on obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{(2-x)(3x+1)}{3(x+1)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit les solutions de cette équation :
$$\mathcal{S} = \Big]-1\,;-\frac{1}{3}\Big]\cup\big[2\,;+\infty\big[.$$

   c. On en déduit la position relative de la droite $\mathscr{C}_f$ relativement à la droite (Δ) :

- La courbe $\mathscr{C}_f$ se situe au dessus de la droite (Δ) sur les deux intervalles $\big]-\infty\,;-1\big[$ et $\Big[-\dfrac{1}{3}\,;2\Big]$.
- La courbe $\mathscr{C}_f$ se situe en dessous de la droite (Δ) sur les deux intervalles $\Big]-1\,;-\dfrac{1}{3}\Big]$ et $\big[2\,;+\infty\big[$.