

Ex 1 - ABCD est un parallélogramme.

E est le point de [CD] tel que $EC = \frac{1}{2} ED$

et F le point de la demi-droite [BC) tel que $CF = \frac{1}{2} CB$.

On cherche à montrer que A, E et F sont alignés de 3 façons différentes.

1) Avec la géométrie plane :

Soit G le point d'intersection de (AE) et (BC).

a) Montrer que $CG = \frac{1}{2} CB$.

b) En déduire que G et F sont confondus et conclure.

2) Avec la géométrie vectorielle :

a) Justifier que $\vec{EC} = -\frac{1}{2} \vec{ED}$ et $\vec{CF} = -\frac{1}{2} \vec{CB}$.

b) A l'aide de la relation de Chasles, montrer que $\vec{EF} = \frac{1}{2} \vec{AE}$ puis conclure.

3) Avec la géométrie analytique :

a) Justifier que $(C; \vec{CB}; \vec{CD})$ est un repère du plan.

b) Justifier les coordonnées des points A, E et F dans ce repère.

c) Conclure.

Ex 2 - Construire un carré ABCD, puis à l'intérieur de ce carré le triangle équilatéral ABE et à l'extérieur du carré le triangle équilatéral ADF.

Il semble que les points C, E et F sont alignés. Nous allons démontrer cette conjecture de 2 façons différentes.

1) Avec des angles :

a) Déterminer la mesure de l'angle \widehat{AEB} .

b) Quelle est la nature du triangle CBE ? En déduire la mesure de l'angle \widehat{BEC} .

c) Quelle est la nature du triangle FAE ? En déduire la mesure de l'angle \widehat{FEA} .

d) En déduire la mesure de l'angle \widehat{FEC} et conclure.

2) Avec des coordonnées :

a) On considère le repère orthonormal $(A; \vec{AB}; \vec{AD})$

b) Déterminer sans justifier les coordonnées de C, E et F

c) Les vecteurs \vec{EC} et \vec{EF} sont-ils colinéaires ?

Conclure.

Ex 3 - ABC est un triangle quelconque et les points E et F sont

définis par : $\vec{CE} = \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{BC}$ et $\vec{AF} = 3 \vec{AB}$.

On veut montrer que les points C, E et F sont alignés.

- 1) Méthode géométrique : Exprimer \vec{CE} et \vec{CF} en fonction des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} puis conclure.
- 2) Méthode analytique : Dans le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AC})$, justifier les coordonnées des points C, E et F puis montrer que les points C, E et F sont alignés

Ex 4 - Une feuille métallique rectangulaire ABCD est protégée par une plaque également rectangulaire MNPQ en plastique opaque.

Les deux rectangles ont le même centre appelé O et la plaque MNPQ « déborde » de 1 cm sur chaque bord de la feuille ABCD.

On note H le milieu de [BC] et K le milieu de [PN].

On voudrait couper la feuille ABCD suivant la diagonale [BD]. Comme cette diagonale est invisible, on se demande si cela revient au même de couper la plaque MNPQ suivant sa diagonale [NQ].

- 1) Justifier en une phrase que le problème revient à montrer que les points O, B et N sont alignés.
- 2) Méthode avec la colinéarité :

On considère le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{6} \vec{DC}$ et $\vec{j} = \frac{1}{5} \vec{DA}$.

Déterminer les coordonnées des points B et N dans ce repère puis répondre à la question posée.

- 3) Méthode avec des distances :

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessus, calculer les distances OB, ON et BN puis conclure.

- 4) Méthode avec des angles :

Déterminer les angles \widehat{HOB} et \widehat{KON} . Justifier rapidement que O, H et K sont alignés et conclure.

- 5) Méthode avec des aires :

Calculer l'aire des triangles OHB et OKN et du trapèze HBNK. Si les points O, B et N étaient alignés, quelle relation aurait-on entre ces trois aires ? Conclure

Ex 5 - ABCD est un parallélogramme de centre O.

I est le milieu de [AB] et E est le point tel que $\vec{DE} = \frac{2}{3} \vec{DI}$.

Il s'agit de démontrer que les points A, E et C sont alignés par différentes méthodes.

- 1) Utilisation d'une configuration :
 - a) Que représente E pour le triangle ABD ?
 - b) Prouver que A, E et O sont alignés.
 - c) En déduire l'alignement de A, E et C.
- 2) Utilisation du calcul vectoriel :
 - a) Exprimez \vec{AE} en fonction de \vec{AB} et \vec{AD} .
 - b) En déduire l'alignement de A, E et C.
- 3) Utilisation du repère $(A; \vec{AB}; \vec{AD})$
 - a) Justifier les coordonnées de A, B, C, D, I et E.
 - b) Montrer que \vec{AE} et \vec{AC} sont colinéaires.
 - c) En déduire l'alignement de A, E et C.

Ex 6 - Soit un parallélogramme ABCD. On désigne par O le centre du parallélogramme, E le symétrique de A par rapport à B, F le symétrique de B par rapport à C, G le symétrique de C par rapport à D, H le symétrique de D par rapport à A. Il semble que le quadrilatère EFGH soit un parallélogramme. Montrons le en utilisant trois méthodes :

- 1) Avec le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AD})$:
 - a) Donner sans justifier les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.
 - b) Calculer les coordonnées des vecteurs \vec{HE} et \vec{GF} , puis conclure.
- 2) Avec Chasles :
 - Exprimer les vecteurs \vec{HE} et \vec{GF} à l'aide des vecteurs \vec{AB} et \vec{AD} puis conclure.
- 3) Avec une symétrie :
 - a) Montrer que AECG est un parallélogramme, puis en déduire le symétrique de E par rapport à O.
 - b) Déterminer de même en deux ou trois lignes, le symétrique de F.
 - c) Conclure.