

Ex 1 - ABCD est un parallélogramme.

E est le point de [CD] tel que  $EC = \frac{1}{2}ED$

et F le point de la demi-droite [BC] tel que  $CF = \frac{1}{2}CB$ .

On cherche à montrer que A, E et F sont alignés de 3 façons différentes.

1) Avec la géométrie plane :

Soit G le point d'intersection de (AE) et (BC).

a) Montrer que  $CG = \frac{1}{2}CB$ .

b) En déduire que G et F sont confondus et conclure.

2) Avec la géométrie vectorielle :

a) Justifier que  $\vec{EC} = -\frac{1}{2}\vec{ED}$  et  $\vec{CF} = -\frac{1}{2}\vec{CB}$ .

b) A l'aide de la relation de Chasles, montrer que  $\vec{EF} = \frac{1}{2}\vec{AE}$  puis conclure.

3) Avec la géométrie analytique :

a) Justifier que (C ;  $\vec{CB}$  ;  $\vec{CD}$ ) est un repère du plan.

b) Justifier les coordonnées des points A, E et F dans ce repère.

c) Conclure.

Ex 2 - Construire un carré ABCD, puis à l'intérieur de ce carré le triangle équilatéral ABE et à l'extérieur du carré le triangle équilatéral ADF.

Il semble que les points C, E et F sont alignés. Nous allons démontrer cette conjecture de 2 façons différentes.

1) Avec des angles :

a) Déterminer la mesure de l'angle  $\widehat{AEB}$ .

b) Quelle est la nature du triangle CBE ? En déduire la mesure de l'angle  $\widehat{BEC}$ .

c) Quelle est la nature du triangle FAE ? En déduire la mesure de l'angle  $\widehat{FEA}$ .

d) En déduire la mesure de l'angle  $\widehat{FEC}$  et conclure.

2) Avec des coordonnées :

a) On considère le repère orthonormal (A ;  $\vec{AB}$  ;  $\vec{AD}$ )

b) Déterminer sans justifier les coordonnées de C, E et F

c) Les vecteurs  $\vec{EC}$  et  $\vec{EF}$  sont-ils colinéaires ?

Conclure.

Ex 3 - ABC est un triangle quelconque et les points E et F sont

définis par :  $\vec{CE} = \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{BC}$  et  $\vec{AF} = 3\vec{AB}$ .

On veut montrer que les points C, E et F sont alignés.

1) Méthode géométrique : Exprimer  $\vec{CE}$  et  $\vec{CF}$  en fonction des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  puis conclure.

2) Méthode analytique : Dans le repère (A ;  $\vec{AB}$  ;  $\vec{AC}$ ), justifier les coordonnées des points C, E et F puis montrer que les points C, E et F sont alignés

Ex 4 - Une feuille métallique rectangulaire ABCD est protégée par une plaque également rectangulaire MNPQ en plastique opaque.

Les deux rectangles ont le même centre appelé O et la plaque MNPQ « débord » de 1 cm sur chaque bord de la feuille ABCD.

On note H le milieu de [BC] et K le milieu de [PN].

On voudrait couper la feuille ABCD suivant la diagonale [BD]. Comme cette diagonale est invisible, on se demande si cela revient au même de couper la plaque MNPQ suivant sa diagonale [NQ].

1) Justifier en une phrase que le problème revient à montrer que les points O, B et N sont alignés.

2) Méthode avec la colinéarité :

On considère le repère orthonormé (O ;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ) avec

$$\vec{i} = \frac{1}{6}\vec{DC} \text{ et } \vec{j} = \frac{1}{5}\vec{DA}.$$

Déterminer les coordonnées des points B et N dans ce repère puis répondre à la question posée.

3) Méthode avec des distances :

Dans le repère (O ;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ) ci-dessus, calculer les distances OB, ON et BN puis conclure.

4) Méthode avec des angles :

Déterminer les angles  $\widehat{HOB}$  et  $\widehat{KON}$ . Justifier rapidement que O, H et K sont alignés et conclure.

5) Méthode avec des aires :

Calculer l'aire des triangles OHB et OKN et du trapèze HBNK. Si les points O, B et N étaient alignés, quelle relation aurait-on entre ces trois aires ? Conclure

Ex 5 - ABCD est un parallélogramme de centre O.

I est le milieu de [AB] et E est le point tel que  $\vec{DE} = \frac{2}{3}\vec{DI}$ .

Il s'agit de démontrer que les points A, E et C sont alignés par différentes méthodes.

1) Utilisation d'une configuration :

a) Que représente E pour le triangle ABD ?

b) Prouver que A, E et O sont alignés.

c) En déduire l'alignement de A, E et C.

2) Utilisation du calcul vectoriel :

a) Exprimez  $\vec{AE}$  en fonction de  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$ .

b) En déduire l'alignement de A, E et C.

3) Utilisation du repère (A ;  $\vec{AB}$  ;  $\vec{AD}$ )

a) Justifier les coordonnées de A, B, C, D, I et E.

b) Montrer que  $\vec{AE}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires.

c) En déduire l'alignement de A, E et C.

Ex 6 - Soit un parallélogramme ABCD. On désigne par O le centre du parallélogramme, E le symétrique de A par rapport à B, F le symétrique de B par rapport à C, G le symétrique de C par rapport à D, H le symétrique de D par rapport à A. Il semble que le quadrilatère EFGH soit un parallélogramme. Montrons le en utilisant trois méthodes :

1) Avec le repère (A ;  $\vec{AB}$  ;  $\vec{AD}$ ) :

a) Donner sans justifier les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.

b) Calculer les coordonnées des vecteurs  $\vec{HE}$  et  $\vec{GF}$ , puis conclure.

2) Avec Chasles :

Exprimer les vecteurs  $\vec{HE}$  et  $\vec{GF}$  à l'aide des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$  puis conclure.

3) Avec une symétrie :

a) Montrer que AECG est un parallélogramme, puis en déduire le symétrique de E par rapport à O.

b) Déterminer de même en deux ou trois lignes, le symétrique de F.

c) Conclure.