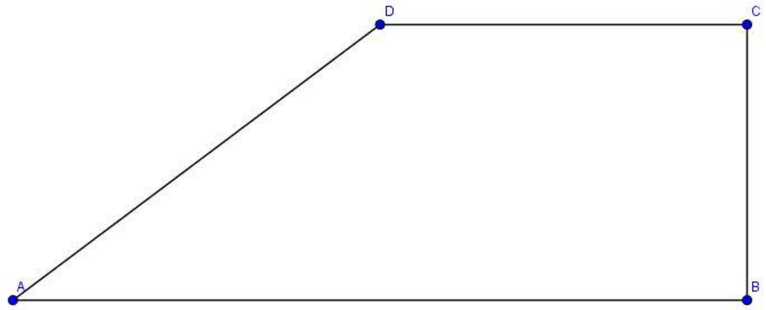
Exercice 1 :

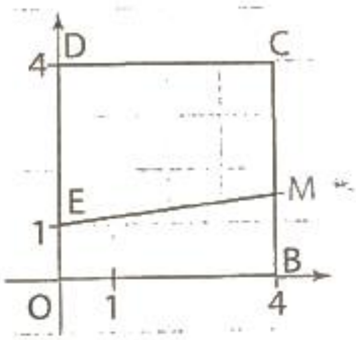
ABCD est un trapèze rectangle avec AB = 8, AD = 5 et BC = 3. M est un point de [AB].



Comparer les aires des triangles AMD, DMC et MBC selon la position de M sur [AB].

Exercice 2 :

117 Dans le repère ci-dessous, OBCD est un carré de côté 4, le point E a pour coordonnées (0 ; 1) et M est un point variable sur le pourtour du carré.



On note x la longueur du trajet effectué par le point M à partir de O dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, avec $0 \leqslant x \leqslant 12$.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du polygone OBME.

1. Quelle est la position de M lorsque $x = 6$?

Déterminer alors $\mathcal{A}(6)$.

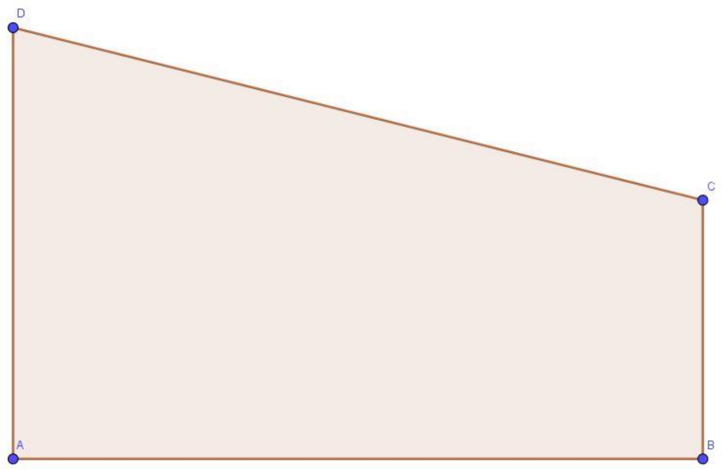
2. a) Exprimer $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x dans chacun des trois cas :

- $M \in [OB]$
- $M \in [BC]$
- $M \in [CD]$

b) En déduire la (les) position(s) du point M telle(s) que l'aire $\mathcal{A}(x)$ soit égale à la moitié de l'aire du carré OBCD.

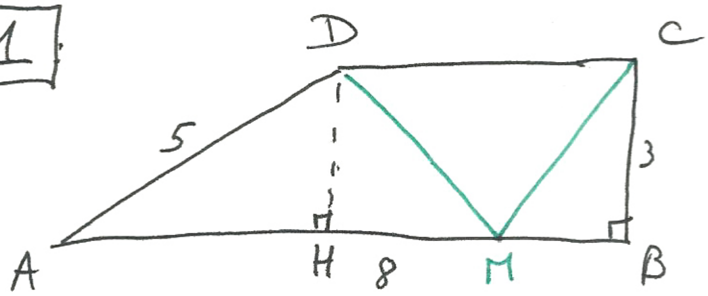
Exercice 3 :

ABCD est un trapèze rectangle avec AB = 8, AD = 5 et BC = 3. M est un point de [AB].



Comparer les aires des triangles AMD, DMC et MBC selon la position de M sur [AB].

Ex 1



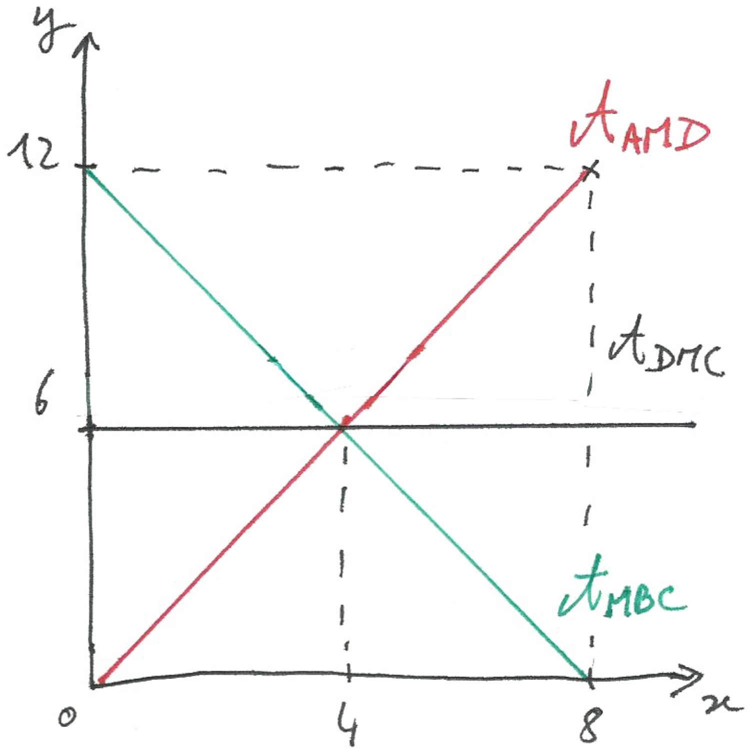
posons $AM = x$, $x \in [0;8]$

D'après Pythagore, $AH = 4$ $(AH^2 = DA^2 - DH^2 = 5^2 - 3^2 = 16)$

- $\mathcal{A}_{AMD} = \dfrac{AM \times DH}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_{AMD} = \dfrac{3}{2}x}$

- $\mathcal{A}_{DMC} = \dfrac{DC \times DH}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_{DMC} = 6}$ $(DC = AB - BH = 8 - 4 = 4)$

- $\mathcal{A}_{MBC} = \dfrac{MB \times BC}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_{MBC} = \dfrac{3}{2}(8-x)} = -\dfrac{3}{2}x + 12$



<u>si $x \in [0;4[$</u>

$\mathcal{A}_{AMD} < \mathcal{A}_{DMC} < \mathcal{A}_{MBC}$

<u>si $x = 4$</u>

$\mathcal{A}_{AMD} = \mathcal{A}_{DMC} = \mathcal{A}_{MBC}$

<u>si $x \in]4;8]$</u>

$\mathcal{A}_{MBC} < \mathcal{A}_{DMC} < \mathcal{A}_{AMD}$

$\boxed{\text{Ex 2 :}}$ $x \in [0;12]$ donc M se déplace de O à D en passant par B et C.

1) $\underline{x=6}$, $OM = OB + BM = 4 + 2$, M milieu de $[BC]$

$$\mathcal{A}(6) = \mathcal{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(2+1)\times 4}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}(6) = 6}$$

2) a) $M \in [OB]$, $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_{OME} = \frac{1 \times x}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}x}$

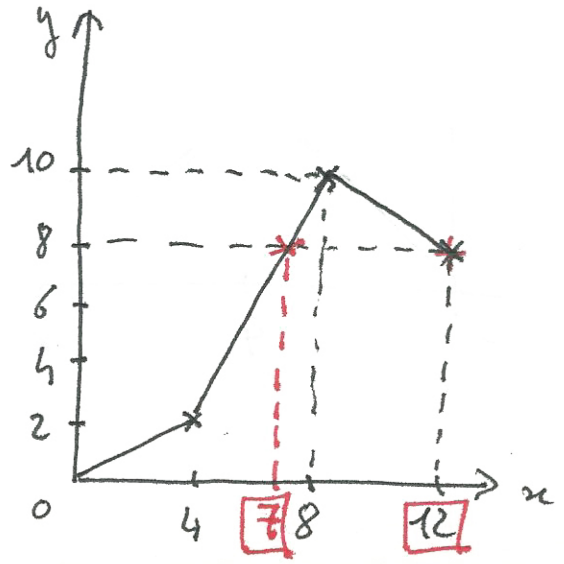
$M \in [BC]$, $\mathcal{A}(x) = \frac{(OE + BM) \times OB}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}(x) = 2x - 6}$ $(BM = x - 4)$

$$M \in [CD], \quad \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_{OBCD} - \mathcal{A}_{MDE} - \mathcal{A}_{MBC}$$
$$= 16 - \frac{MD \times DE}{2} - \frac{MC \times BC}{2}$$
$$= 16 - \frac{3}{2}(12 - x) - 2(x - 8)$$
$$\boxed{\mathcal{A}(x) = 14 - \frac{1}{2}x}$$

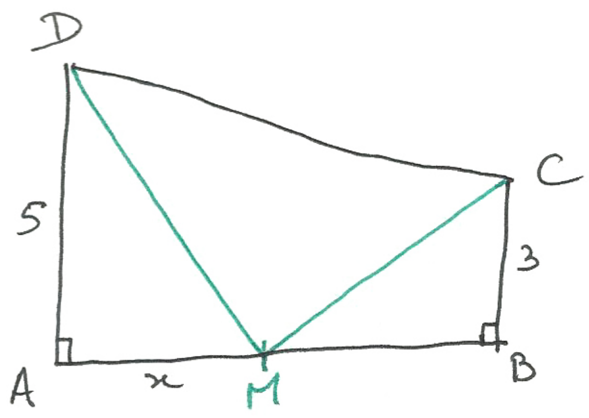
b) On cherche x tel que $\mathcal{A}(x) = \frac{\mathcal{A}_{OBCD}}{2} = 8$.

- Si $M \in [OB]$, $x \in [0;4]$, $\frac{1}{2}x = 8 \Leftrightarrow x = 16 \notin [0;4]$.
- Si $M \in [BC]$, $x \in [4;8]$, $2x - 6 = 8 \Leftrightarrow \boxed{x = 7} \in [4;8]$
- Si $M \in [CD]$, $x \in [8;12]$, $14 - \frac{1}{2}x = 8 \Leftrightarrow \boxed{x = 12} \in [8;12]$

Il existe 2 positions de M :
- $M \in [BC]$ tel que $MB = 3$
- M en D.



Ex 3



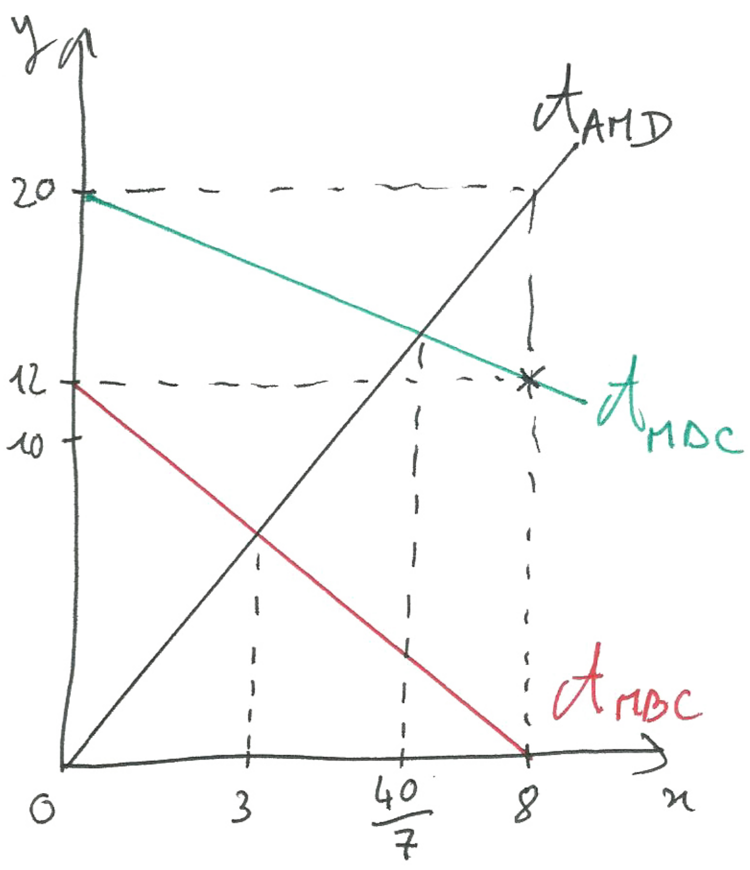
posons $AM = x$.

- $\boxed{\mathcal{A}_{AMD} = \frac{5}{2}x}$
- $\boxed{\mathcal{A}_{MBC} = \frac{3}{2}(8-x)} = -\frac{3}{2}x + 12$

- $\mathcal{A}_{MDC} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{AMD} - \mathcal{A}_{BMC}$

$$= \frac{(5+3)\times 8}{2} - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}(8-x)$$

$$\boxed{\mathcal{A}_{MDC} = 20 - x}$$



$\begin{cases} y = \frac{5}{2}x \\ y = 20 - x \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{40}{7}}}$

$\begin{cases} y = \frac{5}{2}x \\ y = -\frac{3}{2}x + 12 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$

- si $x \in [0;3[$, $\mathcal{A}_{AMD} < \mathcal{A}_{MBC} < \mathcal{A}_{MDC}$
- si $x = 3$, $\mathcal{A}_{AMD} = \mathcal{A}_{MBC} < \mathcal{A}_{MDC}$
- si $x \in]3; \frac{40}{7}[$, $\mathcal{A}_{MBC} < \mathcal{A}_{AMD} < \mathcal{A}_{MDC}$
- si $x = \frac{40}{7}$, $\mathcal{A}_{MBC} < \mathcal{A}_{AMD} = \mathcal{A}_{MDC}$
- si $x \in]\frac{40}{7}; 8]$, $\mathcal{A}_{MBC} < \mathcal{A}_{MDC} < \mathcal{A}_{AMD}$