EXERCICES SUR LES FONCTIONS DÉRIVÉES

Exercice 1

Dériver les fonctions définies ci-dessous :

$f(x) = x^2$

$g(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$

$h(x) = \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$

$k(x) = \dfrac{x+5}{x^2+1}$

Exercice 2

Dériver les fonctions définies ci-dessous :

$f(x) = 4x^2 - 3x + 1$

$g(x) = (2x+3)(3x-7)$

$h(x) = \dfrac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \dfrac{1}{3}$

$k(x) = \left(2x^2 + 3x + 1\right)^5$

Exercice 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 1$. On note C_f sa représentation graphique.

On considère également la fonction g définie par $g(x) = 3 - x$. On note D sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $x_0 = 2$.
3. Résoudre, par calcul, l'équation $g(x) = f(x)$.
4. Préciser les coordonnées des points d'intersections de C_f et D.
5. Tracer sur un même repère les droites T, D et la courbe C_f.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$. On note C_f sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Soit A le point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe C_f en A.
3. Soit B le point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe C_f en B.
4. Tracer sur un même repère T_A , T_B et C_f.

Exercice 5

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad\qquad g(x) = x^3 - 3x$$

1. Étude de f
   a) Calculer la dérivée f' de f.
   b) Étudier le signe de la dérivée f'.
   c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
2. Étude de g

a) Calculer la dérivée g' de g.

b) Étudier le signe de la dérivée g'.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction g.

3. Comparaison des deux fonctions

a) Graphiques :

i) Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes C_f et C_g représentant les fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-2 ; 2]$ et on prendra un pas de 0,5)

ii) À l'aide du graphique, essayer de répondre aux questions suivantes :

a) Combien y a-t-il de points d'intersections entre C_f et C_g ?

b) Quelles sont leurs coordonnées ?

b) Pour avoir plus de précision, on se propose de retrouver ces résultats par calcul :

i) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

ii) En déduire, par calcul, les coordonnées des points A et B d'intersection entre C_f et C_g.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que f est une fonction impaire.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
3. Quel est le signe du dénominateur de $f'(x)$?
4. Résoudre l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum.
6. Tracer (soigneusement) la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-4 ; 4]$.

Exercice 7

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 \qquad\qquad g(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

1. Étude de f

a) Calculer la dérivée f' de f.

b) Étudier le signe de la dérivée f'.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

2. Étude de g

a) Calculer la dérivée g' de g.

b) Étudier le signe de la dérivée g'.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction g.

3. Comparaison des deux fonctions

a) Graphiques :

i) Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes C_f et C_g représentant les fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-3 ; 5]$ et on prendra un pas de 0,25)

ii) À l'aide du graphique, essayer de répondre aux questions suivantes :

a) Combien y a-t-il de point(s) d'intersection(s) entre C_f et C_g ?

b) Quelles sont leur(s) coordonnée(s) ?

b) Pour avoir plus de précision, on se propose de retrouver ces résultats par calcul :

i) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

ii) En déduire, par calcul, les coordonnées du point d'intersection A entre C_f et C_g.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Étudier le signe de la dérivée f'.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction f. (On précisera les éventuels extremums)
4. Tracer la courbe C_f représentant la fonction f sur l'intervalle $[-1 ; 3]$.
5. Déterminer, par un calcul, les coordonnées des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

Exercice 9

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

On note C_f sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.
4. Tracer T et C_f (dans un même repère)
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2 ; 3]$
6. Donner une valeur approchée de α, par défaut, à 10^{-1} près.

Exercice 11

On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

1. Déterminer ses dimensions (Longueur L et largeur ℓ) sachant que son aire S est égale à $\frac{3}{4}$ cm^2.
2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.

a) Exprimer S en fonction de ℓ.

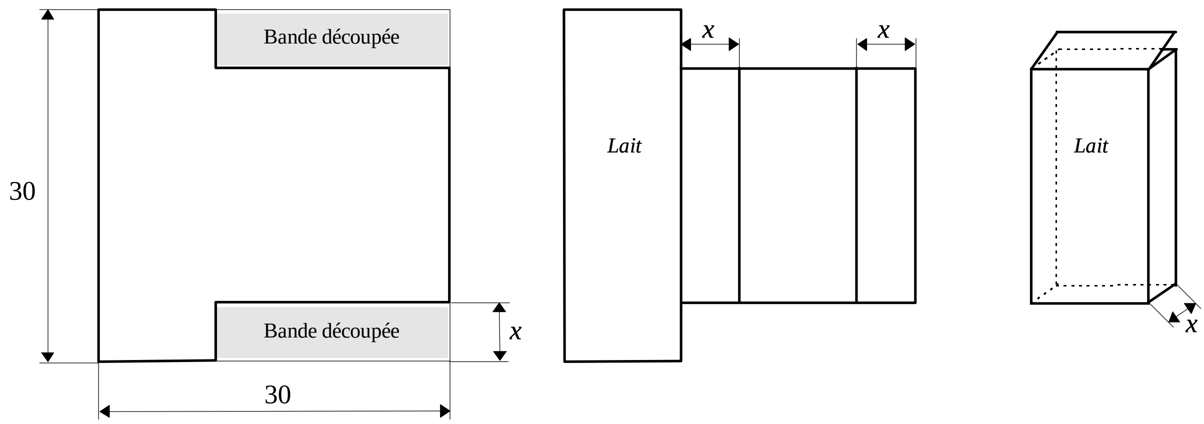
b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2 - x)$.

Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f. Tracer la représentation graphique C_f de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

c) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

Exercice 12

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.
   a) Étudier les variations de f sur l'intervalle [0 ; 20]. Dresser le tableau de variations de f.
   b) Déterminer une équation de la tangente Δ à la représentation graphique de f au point d'abscisse 0.
   c) Déterminer, par calcul, les coordonnées des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
   d) Tracer Δ et la représentation graphique de f pour $x \in [0 ; 20]$.
2. Un fabriquant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée.



Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.

   a) Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.
   b) Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est–il maximal ? Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - x + 2$ sur l'intervalle [–2 ; 2].

Soit C_f sa courbe représentative.

1. Donner (en justifiant) l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
2. Tracer (dans un même repère) C_f et cette tangente sur l'intervalle [–2 ; 2].

Exercice 14

Soit $\mathcal{P}$ la parabole définie par la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 1$. ($x \in \mathbb{R}$)

Calculer les coordonnées de son sommet S.

Exercice 15

Un camion doit faire un trajet de 150 km. Sa consommation de gasoil est de $6 + \frac{v^2}{300}$ litres par heure, où v désigne sa vitesse en km/h. Le prix du gasoil est de 0,9 € le litre, et on paie le chauffeur 12 € par heure.

1. Soit t la durée du trajet en heure. Exprimer t en fonction de la vitesse v.
2. Calculer le prix de revient $P(v)$ du trajet en fonction de v.
3. Quel doit être la vitesse v du camion pour que le prix de revient $P(v)$ de la course soit minimal ?

Exercice 16

Le but de cet exercice est de calculer la limite suivante :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{2005}-1}{h}.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + x)^{2005}$.

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f. Puis calculer $f'(0)$.
2. Calculer l'accroissement moyen de la fonction f entre 0 et h. En déduire la limite ci-dessus.

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x + 1$. Soit C_f sa courbe représentative.

1. Donner (en justifiant) l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
2. Tracer (dans un même repère) C_f et cette tangente sur l'intervalle $[-1 ; 1,5]$.

Exercice 18

1. Dériver les fonctions f et g définies ci-dessous :

$$f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}} \text{ sur }]0 ; +\infty[\qquad\qquad g(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

2. Calculer $f'(16)$ et $g'(2)$.

Exercice 19

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x}$.

1. Calculer la dérivée f' puis étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. Tracer la représentation graphique C_f de la fonction f sur $[-4 ; 0[\cup]0 ; 4]$.

Exercice 20

Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-2} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

1) Déterminer $f'(x)$.
2) Déterminer a et b tels que la droite d'équation $y = 8$ soit tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.
3) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

4) Déduire de la question 3) que $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont on précisera une équation.

5) Question facultative :

Déterminer l'abscisse de l'autre point de $\mathscr{C}$ où la tangente est horizontale.

Exercice 21

Question préliminaire : factoriser le polynôme $P(x) = x^2 + 2x - 3$

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 - 3x + 1$$

1. Étudier la parité des fonctions f et g.
2. Étudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions f et g.
3. Calculer les dérivées f' et g'. Étudier leur signe.
4. Dresser les tableaux de variation des fonctions f et g.
5. Tracer les représentation graphique C_f et C_g des fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-3 ; 3]$)
6. Résoudre, par calcul, l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$. (On pourra utiliser la question préliminaire)

Exercice 22

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$$

1. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$, $+\infty$, 2^- et 2^+.

   Préciser les éventuelles asymptotes horizontales et verticales.
2. Calculer la dérivée f' et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Le but de cette question est de démontrer que la courbe C_f admet une asymptote oblique Δ.

   a) Déterminer trois réels a, b et c tels que :

   $$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$$

   b) En déduire que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Tracer C_f et ses asymptotes.

Exercice 23

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2$$

1. Montrer que f est dérivable en 2.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentant f au point d'abscisse 2.

Exercice 24

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ par : $f(x) = \dfrac{-3}{x + 4} + 2$

On note C_f la courbe représentant la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Étudier les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, -4^-, -4^+. Préciser les équations des éventuelles asymptotes.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f et préciser son signe.
3. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f (On n'oubliera pas d'y reporter les limites calculées à la question 1 ainsi que la valeur interdite...)
4. Tracer la courbe C_f avec ses éventuelles asymptotes. (Conseil : tracer d'abord les asymptotes, s'il y en a ...)

Exercice 25

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{-2}{x-1} + 3$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les limites de f en 1^- et en 1^+.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f. Quel est son signe ?
4. Dresser le tableau de variation (complet) de la fonction f.
5. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f.
6. Sur une feuille séparée, tracer T, C_f (Unités graphiques : au moins 2 cm par unité sur chaque axe)
7. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 1$.

Exercice 26

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x}$. On note C_f sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. Vérifier que $f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x}$.
3. Étudier la limite de f quand x tend vers 0. En déduire que C_f admet une asymptote D dont on précisera une équation.
4. Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
5. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 3)]$. En déduire que C_f admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ dont on précisera l'équation. Quelle est la position de C_f par rapport à Δ ?
6. Calculer la dérivée f' de f et montrer que l'on a : $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$.
7. Étudier le signe de f' puis en déduire le tableau des variations de f.

Exercice 27

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.
2. Étudier les limites de f en 4 et en $+\infty$.
3. Étude de la fonction f sur $[4 ; +\infty[$.
   a) Étudier la dérivabilité de la fonction f au point d'abscisse $x_0 = 4$.
   b) Calculer la dérivée f' (pour $x > 4$). Établir le tableau de variations de f sur l'intervalle $[4 ; +\infty[$.
   c) Tracer la courbe C_f représentant f sur l'intervalle $[4 ; 10]$.

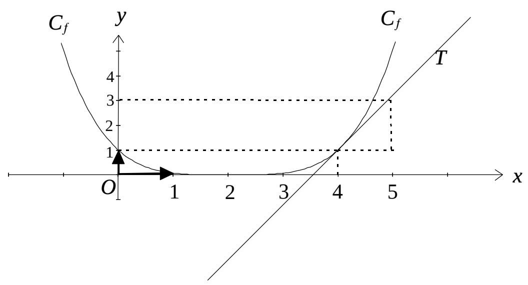
Exercice 28

Sur le graphique ci-dessous sont représentées la courbe C_f de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^4$$

ainsi que la tangente T à C_f au point d'abscisse $x_0 = 4$.

1. Donner, par lecture graphique, et sans justifications, la valeur du nombre $f'(4)$.
2. Déterminer, à l'aide du calcul de la dérivée de f, la valeur du nombre $f'(3)$.



Exercice 29

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$

1. Calculer la dérivée f' et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 30

Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I = [0 ; 1]$ telles que : $f(0) = g(0)$ et $f' \leqslant g'$ sur I

Démontrer que $f \leqslant g$ sur I. (On pourra étudier les variations de $g - f$)

Exercice 31

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 1}$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unités : 1 cm par axe)

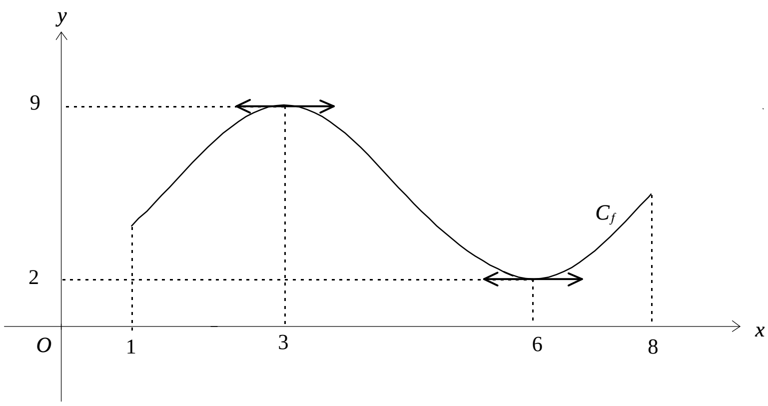
1. Calculer $f(0)$. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des ordonnées.
2. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.
3. Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

4. Étudier les limites de f en -1^+ et en -1^-. En déduire que la courbe C_f admet une asymptote verticale D dont on précisera l'équation.
5. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. La courbe C_f admet-elle une asymptote horizontale ?
6. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 6$ est asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. Préciser la position relative de C_f et de Δ.
7. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe. En déduire le tableau de variation de f.
8. Déterminer une équation des tangentes T_{-2} et T_{-3} aux points de la courbe C_f d'abscisses respectives -2 et -3.
9. Tracer, dans le repère, D, Δ, T_{-2}, T_{-3} et C_f. (On se limitera à $[-10 ; -1[\cup]-1 ; 6]$)

Exercice 32

Ci-contre est donnée la courbe C_f représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1 ; 8]$.



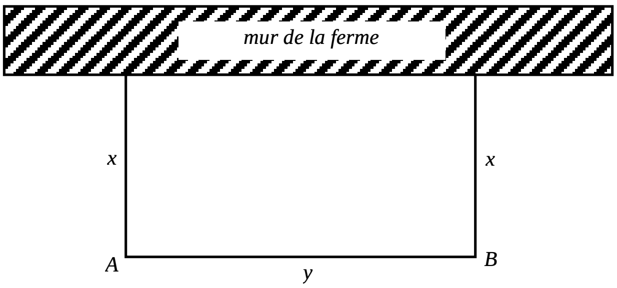
1. Par lecture graphique, donner, sans justifier, la valeur de :

   $f(3)$; $f'(3)$; $f(6)$; $f'(6)$

2. Le graphique ne permet pas la lecture de $f'(4)$. Préciser néanmoins son signe. (Expliquer)

Exercice 33

Un fermier décide de réaliser un poulailler (en forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m². Où doit-on placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?



La figure ci-dessus représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre les 2 piquets A et B. (On a donc $x > 0$ et $y > 0$)

1. Sachant que l'aire du poulailler est 392 m², exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que la longueur $\ell(x)$ du grillage est : $\ell(x) = \dfrac{2x^2 + 392}{x}$.
3. Calculer la dérivée ℓ' de ℓ. En déduire le tableau de variation de ℓ.
4. En déduire les dimensions x et y pour lesquelles la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.

Exercice 34

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Étudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 35

Une parabole P admet, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, une équation du type :

$$y = a\,x^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Déterminer les coefficients a, b et c sachant que P coupe l'axe des abscisses (Ox) au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées (Oy) au point B d'ordonnée 2 et qu'elle admet en ce point la droite d'équation $y = 2x + 2$ pour tangente.

Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de P avec (Ox).