Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a) $2 < |x + 1| < 3$

b) $\frac{1}{2} \leq |x - 3| < 4$

c) $\begin{cases} |x - 3| > 2 \\ |x + 4| \leq 3 \end{cases}$

Exercice 2 :

On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x + 2| + |x - 5| = 11$ (1).

Partie 1 : Additionner deux valeurs absolues en utilisant la droite graduée des réels

1) On considère sur la droite numérique, les points A, B et M d'abscisses respectives -2, 5 et x.
Comment s'écrit alors l'équation (1) ?

2) a) Si $M \in [AB]$, montrer que AM + BM est constant.
Qu'en déduit-on ?

b) Si M appartient à la demi-droite d'origine A et ne contenant pas B, montrer que (1) s'écrit :

$$2AM + AB = 11.$$

c) Si M appartient à la demi-droite d'origine B et ne contenant pas A, procéder de manière analogue à la question précédente et en déduire la solution correspondante.

3) Conclure.

Partie 2 : Additionner deux valeurs absolues en utilisant un tableau

4) Selon les valeurs de x compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$ -2	5	$+\infty$
$\|x + 2\|$			
$\|x - 5\|$			
$\|x + 2\| + \|x - 5\|$			

En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de $|x + 2| + |x - 5| = 11$

5) En utilisant la méthode du tableau résoudre les équations suivantes :

a) $2|x + 2| + |x - 5| = 9$

b) $|x + 2| - 2|x - 5| = 5$

CORRECTION

Exercice 1 :

a) On résout le système suivant :

$$\begin{cases} |x + 1| < 3 \\ |x + 1| > 2 \end{cases}$$

On détermine l'ensemble I des solutions de la première inéquation et l'ensemble J des solutions de la deuxième inéquation.

L'ensemble des solutions du système est alors $S = I \cap J$.

Résolution de $|x + 1| < 3$:

En termes de distance : Soit A le point d'abscisse -1 sur la droite graduée des réels et M le point d'abscisse x.

L'inéquation se traduit par $AM < 3$

Soit $-1 - 3 < x < -1 + 3$

Donc $I =]-4 ;2[$.

Résolution de $|x + 1| > 2$:

L'inéquation se traduit par $AM > 2$

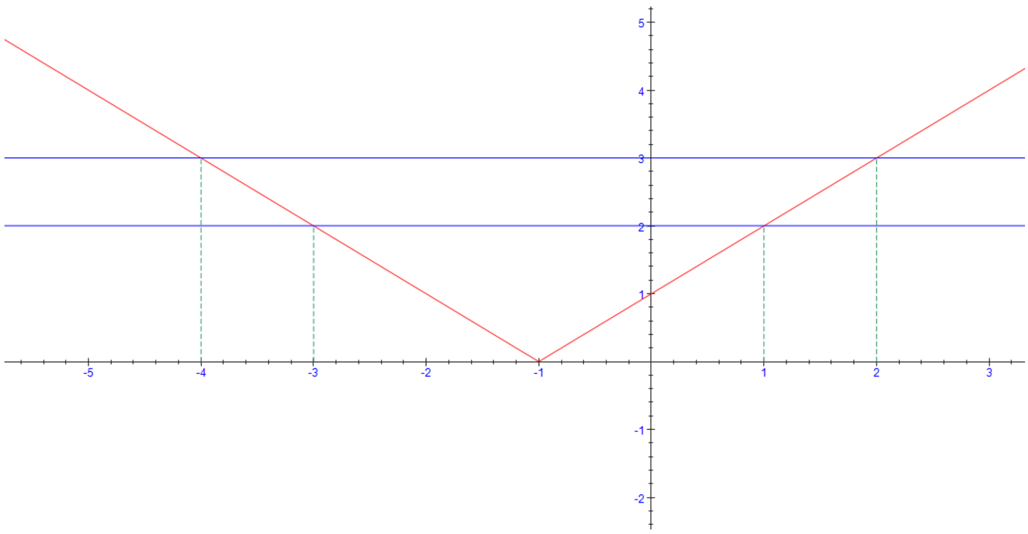
Soit $x < -1 - 2$ ou $x > -1 + 2$

Donc $J =]-\infty ;-3[\cup]1 ;+\infty[$.

$S = I \cap J =]-4 ;-3[\cup]1 ;2[$

Conclusion : L'ensemble des solutions de la double inéquation $2 < |x + 1| < 3$ est $S =]-4 ;-3[\cup]1 ;2[$

On peut résoudre graphiquement cette double inéquation à partir du tracé de la courbe représentant la fonction $f : x \rightarrow |x + 1|$ et des droites horizontales d'équation $y = 2$ et $y = 3$:



CORRECTION

b) On résout le système suivant :

$$\begin{cases} |x - 3| \geq \dfrac{1}{2} \\ |x - 3| < 4 \end{cases}$$

On détermine l'ensemble I des solutions de la première inéquation et l'ensemble J des solutions de la deuxième inéquation.

L'ensemble des solutions du système est alors $S = I \cap J$.

Résolution de $|x - 3| < 4$:

En termes de distance : Soit A le point d'abscisse 3 sur la droite graduée des réels et M le point d'abscisse x.

L'inéquation se traduit par $AM < 4$

Soit $3 - 4 < x < 3 + 4$

Donc $I =]-1 ;7[$.

Résolution de $|x - 3| \geq \frac{1}{2}$:

L'inéquation se traduit par $AM \geq \frac{1}{2}$

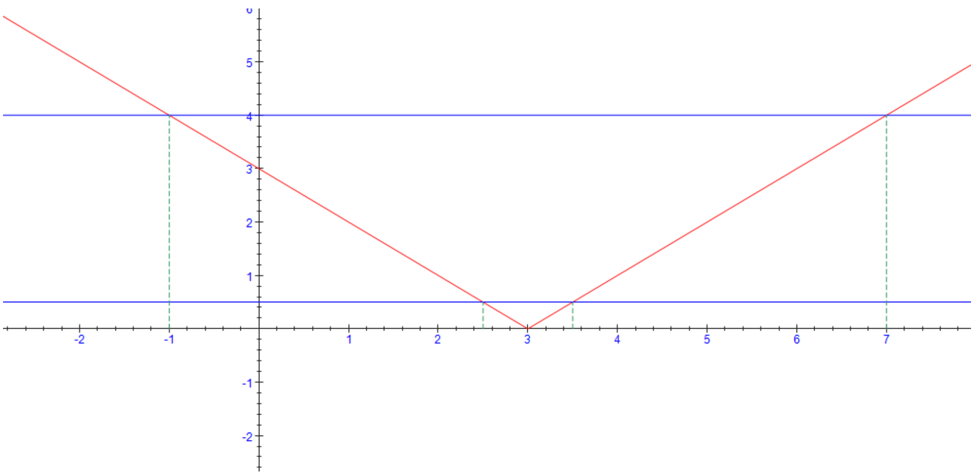
Soit $x \leq 3 - \frac{1}{2}$ ou $x \geq 3 + \frac{1}{2}$

Donc $J = \left]-\infty ;\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2} ;+\infty\right[$.

$S = I \cap J = \left]-1 ;\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2} ;7\right[$

Conclusion : L'ensemble des solutions de la double inéquation $\frac{1}{2} \leq |x - 3| < 4$ est $S = \left]-1 ;\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2} ;7\right[$

On peut résoudre graphiquement cette double inéquation à partir du tracé de la courbe représentant la fonction $f : x \rightarrow |x - 3|$ et des droites horizontales d'équation $y = \frac{1}{2}$ et $y = 4$:



CORRECTION

c) $\begin{cases} |x-3| > 2 \\ |x+4| \leq 3 \end{cases}$

On détermine l'ensemble I des solutions de la première inéquation et l'ensemble J des solutions de la deuxième inéquation.
L'ensemble des solutions du système est alors $S = I \cap J$.
Résolution de $|x - 3| > 2$:
En termes de distance : Soit A le point d'abscisse 3 sur la droite graduée des réels et M le point d'abscisse x.
L'inéquation se traduit par $AM > 3$
Soit $x < 3 - 2$ ou $x > 3 + 2$
Donc $I =]-\infty ;1[\cup]5 ;+\infty[$

Résolution de $|x + 4| \leq 3$:
Soit B le point d'abscisse -4.
L'inéquation se traduit par $BM \leq 3$.
Soit $-4 - 3 \leq x \leq -4 + 3$
Donc $J = [-7;-1]$
$S = I \cap J = J = [-7 ;-1]$

d) Conclusion : L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} |x-3| > 2 \\ |x+4| \leq 3 \end{cases}$ est $S = [-7 ;-1]$.

Exercice 2 :

Partie 1 : Additionner deux valeurs absolues en utilisant la droite graduée des réels

1) L'équation s'écrit à l'aide de distances : $AM + BM = 11$.
2) a) Si $M \in [AB]$ alors $AM + BM = AB = 7$.
Or $7 \neq 11$ donc pas de solution correspondante pour l'équation (1).
b) Si M appartient à la demi-droite d'origine A et ne contenant pas B alors :
$MB = AM + AB$ et $AM + BM = 11 \rightarrow 2AM + AB = 11$.
Soit $2AM = 11 - 7$
Soit $AM = 2$
Soit $x = -2 - 2 = -4$
Attention, la solution $-2 + 2$ ne convient pas car $0 > -2$.
c) Si M appartient à la demi-droite d'origine B et ne contenant pas A alors :
$AM = AB + BM$ et $AM + BM = 11 \rightarrow 2BM + AB = 11$
Soit $2BM = 4$
Soit $BM = 2$
Soit $x = 5 + 2 = 7$

CORRECTION

Attention, la solution 5 - 2 ne convient pas car 3 < 5.

3) Les solutions de l'équation $|x + 2| + |x - 5| = 11$ sont donc -4 et 7.

Partie 2 : Additionner deux valeurs absolues en utilisant un tableau

4)

x	$-\infty$	-2	5 $\quad$ $+\infty$
$\|x + 2\|$	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$
$\|x - 5\|$	$-x + 5$	$-x + 5$	$x - 5$
$\|x + 2\| + \|x - 5\|$	$-2x + 3$	7	$2x - 3$

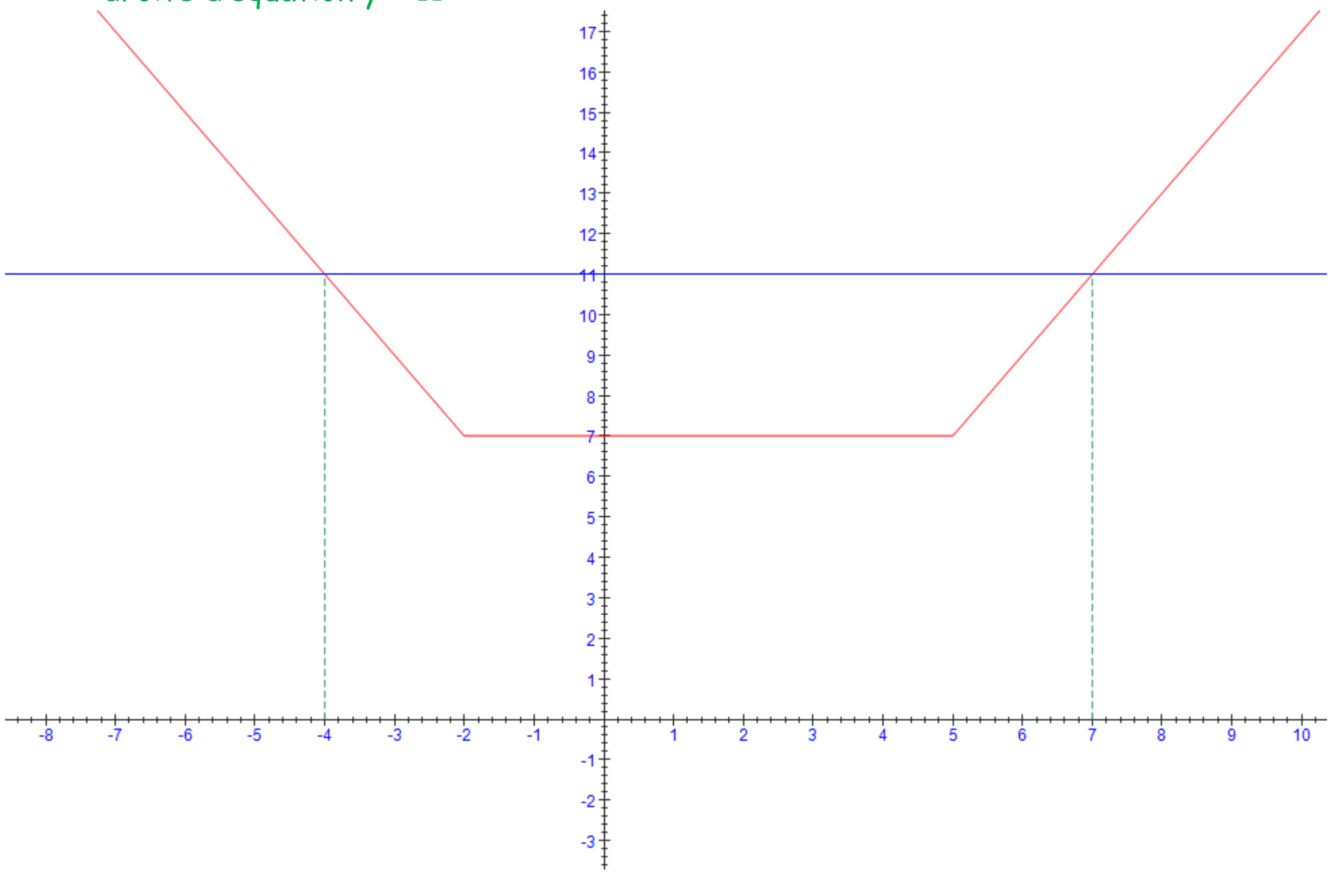
Du tableau, on déduit que :

$|x + 2| + |x - 5| = 11 \Leftrightarrow (-2x + 3 = 11 \text{ et } x \leq -2) \text{ ou } (2x - 3 = 11 \text{ et } x \geq 5)$

$\Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = 7$

Donc l'ensemble des solutions est $S = \{-4 ;7\}$.

<u>Remarque</u> : On peut résoudre cette équation graphiquement à partir des abscisses des points d'intersection des courbes d'équation $y = |x + 2| + |x - 5|$ et de la droite d'équation $y = 11$:



CORRECTION

5) a) $2|x + 2| + |x - 5| = 9$

x	$-\infty$ -2	5	$+\infty$
$2\lvert x + 2\rvert$	$-2x - 4$	$2x + 4$	$2x + 4$
$\lvert x - 5\rvert$	$-x + 5$	$-x + 5$	$x - 5$
$2\lvert x + 2\rvert + \lvert x - 5\rvert$	$-3x + 1$	$x + 9$	$3x - 1$

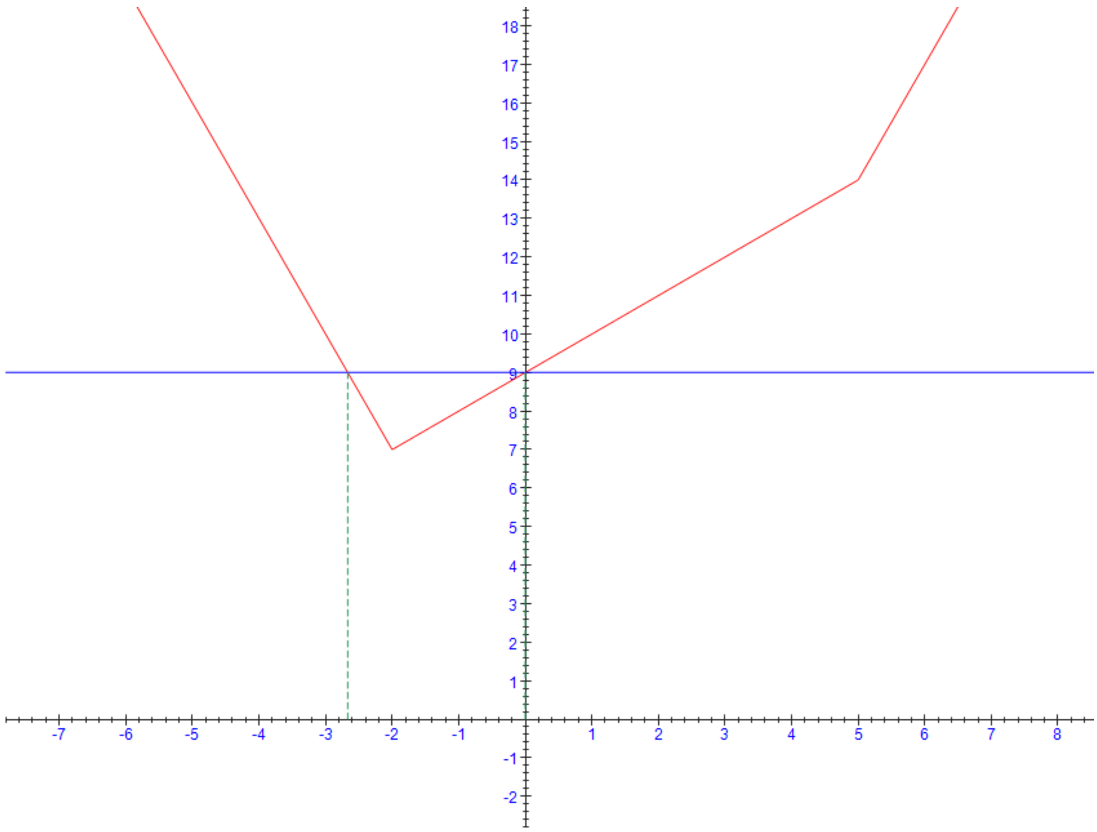
$2|x + 2| + |x - 5| = 9$

$\Leftrightarrow$ $(-3x + 1 = 9$ et $x \leq -2)$ ou $(x + 9 = 9$ et $-2 \leq x \leq 5)$ ou $(3x - 1 = 9$ et $x \geq 5)$

$\Leftrightarrow$ $x = -\dfrac{8}{3}$ ou $x = 0$

Donc $S = \left\{-\dfrac{8}{3}; 0\right\}$

<u>Remarque</u> : On peut résoudre cette équation graphiquement à partir des abscisses des points d'intersection des courbes d'équation $2|x + 2| + |x - 5|$ et de la droite d'équation $y = 9$:



CORRECTION

b) $|x + 2| - 2|x - 5| = 5$

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad$ -2	$\quad\quad\quad\quad\quad$ 5	$\quad\quad\quad$ $+\infty$
$\lvert x + 2\rvert$	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$
$-2\lvert x - 5\rvert$	$2x - 10$	$2x - 10$	$-2x + 10$
$\lvert x + 2\rvert - 2\lvert x - 5\rvert$	$x - 12$	$3x - 8$	$-x + 12$

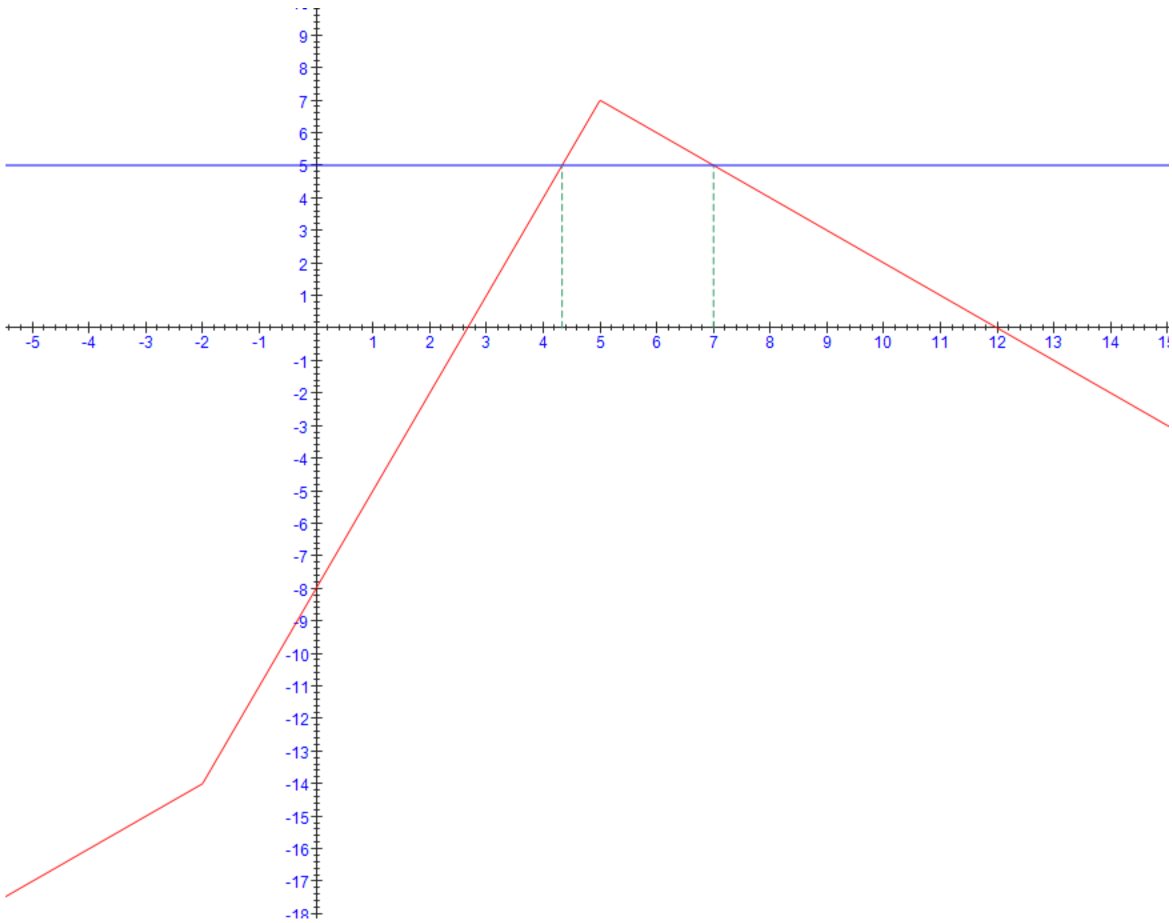
$|x + 2| - 2|x - 5| = 5$

$\Leftrightarrow$ $(x - 12 = 5 \text{ et } x \leq -2)$ ou $(3x - 8 = 5 \text{ et } -2 \leq x \leq 5)$ ou $(-x + 12 = 5 \text{ et } x \geq 5)$

$\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{13}{3}$ ou $x = 7$

Donc $S = \left\{ \dfrac{13}{3} ; 7 \right\}$

<u>Remarque</u> : On peut résoudre cette équation graphiquement à partir des abscisses des points d'intersection des courbes d'équation $|x + 2| - 2|x - 5|$ et de la droite d'équation $y = 5$:



CORRECTION

Remarque :
Les fonctions $x \mapsto |x + 2| + |x - 5|$ ou $x \mapsto 2|x + 2| + |x - 5|$ ou $x \mapsto |x + 2| - 2|x + 5|$ sont appelées des fonctions **affines par morceaux.**