Factorisations

Énoncés

Exercice 1. Avec facteur commun évident

★☆☆☆☆ A

Corrigé page 17

(Source : sec-fact-01)

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant qu'elles sont toutes de **type 1**, à savoir que le facteur commun est explicite dans chaque terme.

1. $A = (2x+1)(x+3) - 2(x+3)(5x+6)$
2. $B = (x-4)(2x+9) + 3(x-4)(7x+3)$
3. $C = (3x-1)(5x+2) - (5x+2)(9x+8)$

Exercice 2. En faisant apparaître le facteur commun

★★★☆☆ A

Corrigé page 17

(Source : sec-fact-02)

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant qu'elles sont toutes de **type 2**, à savoir que le facteur commun n'est pas explicite dans chaque terme mais que l'on peut le faire apparaître sans l'aide d'une identité remarquable.

1. $D = (9x+6)(4x+1) + (3x+2)(1-4x)$
2. $E = (2x+3)(5x-10) - 3(x-2)(5x+9)$
3. $F = (3x-1)(2x+7) - 4(1-3x)(7-2x)$

Exercice 3. À l'aide des identités remarquables

★★★★☆ A

Corrigé page 18

(Source : sec-fact-03)

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant qu'elles sont toutes de **type 3**, à savoir que le facteur commun n'est pas explicite dans chaque terme mais que l'on peut le faire apparaître à l'aide d'une identité remarquable.

1. $G = 9x^2 + 6x + 1 - (3x+1)(4x-1)$
2. $H = 4x^2 - 12x + 9 + (2x-3)(7x+1)$
3. $I = 25x^2 - 4 + 3(5x-2)(x+3)$

■ Exercice 4. À l'aide d'une identité remarquable

★★★★★ A

Corrigé page 18

(Source : sec-fact-04)

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant qu'elles sont toutes de **type 4**, à savoir que le facteur commun n'est pas explicite dans chaque terme mais que l'on peut faire apparaître une identité remarquable de la forme $a^2 - b^2$ pour factoriser.

1. $J = (9x + 18)(x + 2) - (4x + 20)(x + 5)$
2. $K = 2(2x + 3)(4x + 6) - 3(3x + 2)(9x + 6)$
3. $L = 7(7x + 1)(49x + 7) + (1 - 4x)(16x - 4)$

Corrigés

2 septembre 2016

Corrigé de l'exercice 1.

A	$= (2x+1)(x+3) - 2(x+3)(5x+6)$	
	$= (x+3)[(2x+1) - 2(5x+6)]$	le facteur commun est $(x+3)$
	$= (x+3)(2x+1-10x-12)$	on enlève les parenthèses dans les crochets en multipliant par -2 le $5x$ et le 6
	$= (x+3)(-8x-11)$	on réduit l'expression dans la deuxième paire de parenthèses
	$\underline{= -(x+3)(8x+11)}$	on met en facteur « -1 » pour la lisibilité

B	$= (x-4)(2x+9) + 3(x-4)(7x+3)$	
	$= (x-4)[(2x+9) + 3(7x+3)]$	le facteur commun est $(x-4)$
	$= (x-4)(2x+9+21x+9)$	on enlève les parenthèses dans les crochets en multipliant par 3 le $7x$ et le 3
	$\underline{= (x-4)(23x+18)}$	on réduit l'expression dans la deuxième paire de parenthèses

C	$= (3x-1)(5x+2) - (5x+2)(9x+8)$	
	$= (5x+2)[(3x-1) - (9x+8)]$	le facteur commun est $(5x+2)$
	$= (5x+2)(3x-1-9x-8)$	on enlève les parenthèses dans les crochets en multipliant par -1 le $9x$ et le 8
	$= (5x+2)(-6x-9)$	on réduit l'expression dans la deuxième paire de parenthèses
	$\underline{= -3(5x+2)(2x+3)}$	on factorise par -2 ce qu'il y a dans la deuxième paire de parenthèses

Corrigé de l'exercice 2.

D	$= (9x+6)(4x+1) + (3x+2)(1-4x)$	
	$= 3\underline{(3x+2)}(4x+1) + \underline{(3x+2)}(1-4x)$	on factorise $(9x+6)$ par 3 pour faire apparaître $(3x+2)$, qui est dans la deuxième partie
	$= (3x+2)[3(4x+1) + (1-4x)]$	on factorise par $(3x+2)$
	$= (3x+2)(12x+3+1-4x)$	on enlève les parenthèses dans les crochets
	$= (3x+2)(8x+4)$	on réduit l'expression dans la seconde paire de parenthèses
	$\underline{= 4(3x+2)(2x+1)}$	on factorise par 4 dans le deuxième facteur

$$
\begin{aligned}
E &= (2x+3)(5x-10) - 3(x-2)(5x+9) \\
&= 5\underline{(x-2)}(2x+3) - 3\underline{(x-2)}(5x+9) && \text{on factorise } (5x-10) \text{ par 5 pour faire apparaître } (x-2)\text{, qui est dans la deuxième partie} \\
&= (x-2)[5(2x+3) - 3(5x+9)] && \text{on factorise par } (x-2) \\
&= (x-2)(10x+15-15x-27) && \text{on enlève les parenthèses dans les crochets} \\
&= (x-2)(-5x-12) && \text{on réduit l'expression dans le second facteur} \\
&\underline{= -(x-2)(5x+12)} && \text{on factorise par } -1 \text{ dans le deuxième facteur}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F &= (3x-1)(2x+7) - 4(1-3x)(7-2x) \\
&= (3x-1)(2x+7) + 4(3x-1)(7-2x) && \text{on factorise } (1-3x) \text{ par } (-1) \text{ pour faire apparaître } (3x-1)\text{, qui est dans la première partie} \\
&= (3x-1)[(2x+7) + 4(7-2x)] && \text{on factorise par } (3x-1) \\
&= (3x-1)(2x+7+28-8x) && \text{on enlève les parenthèses dans les crochets} \\
&\underline{= (3x-1)(-6x+35)} && \text{on réduit l'expression dans le second facteur}
\end{aligned}
$$

Corrigé de l'exercice 3.

$$
\begin{aligned}
G &= 9x^2 + 6x + 1 - (3x+1)(4x-1) \\
&= (3x+1)^2 - (3x+1)(4x-1) && \text{on veut que } 9x^2+6x+1 \text{ soit une identité remarquable de la forme } (a+b)^2\text{, donc il faut que } 9x^2 = a^2 \text{ et que } 1 = b^2 \\
& && \text{donc } a = 3x \text{ et } b = 1 \\
&= (3x+1)[(3x+1) - (4x-1)] && \text{on factorise par } (3x+1) \\
&= (3x+1)(3x+1-4x+1) && \text{on enlève les parenthèses dans les crochets} \\
&\underline{= (3x+1)(-x+2)} && \text{on réduit l'expression dans le second facteur}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H &= 4x^2 - 12x + 9 + (2x-3)(7x+1) \\
&= (2x-3)^2 + (2x-3)(7x+1) && \text{il faut que } 4x^2 = a^2 \text{ et } 9 = b^2\text{, donc } a = 2x \text{ et } b = 3 \\
&= (2x-3)(2x-3+7x+1) \\
&\underline{= (2x-3)(9x+2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= 25x^2 - 4 + 3(5x-2)(x+3) \\
&= (5x)^2 - 2^2 + 3(5x-2)(x+3) && \text{on fait apparaître une expression de la forme } a^2 - b^2 \\
&= (5x-2)(5x+2) + 3(5x-2)(x+3) && \text{on factorise } a^2 - b^2 \text{ en } (a-b)(a+b) \\
&= (5x-2)[5x+2+3(x+3)] \\
&= (5x-2)(5x+2+3x+9)] \\
&\underline{= (5x-2)(8x+11)}
\end{aligned}
$$

Corrigé de l'exercice 4.

$$
\begin{aligned}
J &= (9x+18)(x+2) - (4x+20)(x+5) \\
&= 9(x+2)(x+2) - 4(x+5)(x+5) \\
&= [3(x+2)]^2 - [2(x+5)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2 - b^2\text{, avec } a = 3(x+2) \text{ et } b = 2(x+5) \\
&= [3(x+2) - 2(x+5)][3(x+2) + 2(x+5)] \\
&= (3x+6-2x-10)(3x+6+2x+10) && \text{on développe dans les crochets} \\
&\underline{= (x-4)(5x+16)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K &= 2(2x+3)(4x+6) - 3(3x+2)(9x+6) \\
&= 2(2x+3) \times 2(2x+3) - 3(3x+2) \times 3(3x+2) \\
&= [2(2x+3)]^2 - [3(3x+2)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2 - b^2 \\
&= [2(2x+3) - 3(3x+2)][2(2x+3) + 3(3x+2)] \\
&= (4x+6-9x-6)(4x+6+9x+6) && \text{on développe dans les crochets} \\
&\underline{= -5x(13x+12)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= 7(7x+1)(49x+7) + (1-4x)(16x-4) \\
&= 7(7x+1) \times 7(7x+1) - (4x-1) \times 4(4x-1) \\
&= [7(7x+1)]^2 - [2(4x-1)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2 - b^2 \\
&= [7(7x+1) - 2(4x-1)][7(7x+1) + 2(4x-1)] \\
&= (49x+7-8x+2)(49x+7+8x-2) && \text{on développe dans les crochets} \\
&\underline{= (41x+9)(57x+5)}
\end{aligned}
$$

Énoncés

Équations & inéquations

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Exercice 1. Équations diverses

★★☆☆☆ A

Corrigé page 23 ✌

(Source : sec-eqineq-01)

Résoudre les équations suivantes :

1. $-3x+7=0$
2. $\frac{3}{5}x-6=0$
3. $-\frac{2}{7}x+\frac{1}{2}=\frac{2}{21}x+2$
4. $(-3x+1)(5x-7)=0$
5. $\left(-\frac{1}{2}x-5\right)\left(\frac{3}{4}x+2\right)=0$
6. $2x(5x-1)(2x+3)=0$
7. $\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}$
8. $\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2x}{x-1}$
9. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=2$
10. $\frac{2}{x-1}=1-\frac{x}{x+1}$

Exercice 2. Équations avec carrés

★★☆☆☆ A

Corrigé page 25

(Source : sec-eqineq-04)

Résoudre les équations suivantes :

1. $(3x-5)^2=16$
2. $\left(x^2-4\right)^2=81$
3. $\left(3x^2-4\right)^2=9$
4. $\left(\frac{2x-1}{x-7}\right)^2=25$

Exercice 3. Équations avec racines carrées

★★★☆☆ A

Corrigé page 27 ✌

(Source : sec-eqineq-05)

Résoudre les équations suivantes :

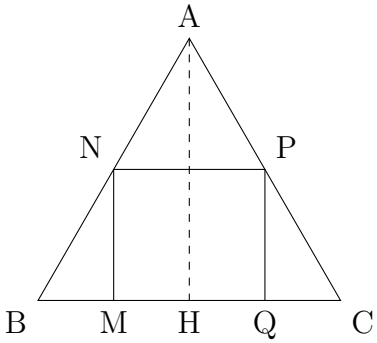
1. $\sqrt{3x-2}=7.$
2. $\sqrt{\frac{5x-4}{3x+1}}=3.$
3. $\sqrt{x^2+x+1}=x+1.$
4. $x\sqrt{7}+\sqrt{2}=\sqrt{7}-x\sqrt{2}.$
5. $\sqrt{(x-2)(3x+4)}=2(3x+4).$

■ Exercice 4. Dans un triangle équilatéral

★★★☆☆ R

Corrigé page 30

(Source : sec-eqineq-03)



Soit ABC un triangle équilatéral tel que AB = 6 et soit H le milieu de [BC].
M est un point de [BH]. On place les points N et P respectivement sur [AB] et [AC] tels que MNPQ soit un rectangle d'axe de symétrie (AH).
On pose BM = x.

1 *a.* Exprimer MN en fonction de x.

b. Justifier que MQ $= 6 - 2x$.

2 On veut que MNPQ soit un carré.

a. Montrer alors que $x\sqrt{3} = 6 - 2x$.

b. Calculer x.

Corrigés

2 septembre 2016

Corrigé de l'exercice 1.

1

$$\begin{aligned}
& -3x+7=0 \\
\Leftrightarrow & -3x=-7 \\
\Leftrightarrow & x=\frac{-7}{-3} \\
\Leftrightarrow & \boxed{x=\frac{7}{3}}
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{5}x-6=0 \\
\Leftrightarrow & \frac{3}{5}x=6 \\
\Leftrightarrow & x=6\times\frac{5}{3} \\
\Leftrightarrow & \boxed{x=10}
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{7}x+\frac{1}{2}=\frac{2}{21}x+2 \\
\Leftrightarrow & -\frac{2}{7}x-\frac{2}{21}x=2-\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow & -\frac{8}{21}x=\frac{3}{2} \\
\Leftrightarrow & x=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{21}{8}\right) \\
\Leftrightarrow & \boxed{x=-\frac{63}{16}}
\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}
& (-3x+1)(5x-7)=0 \\
\Leftrightarrow & -3x+1=0 \text{ ou } 5x-7=0 \\
\Leftrightarrow & x=\frac{1}{3} \text{ ou } x=\frac{7}{5} \\
\Leftrightarrow & \boxed{S=\left\{\frac{1}{3}\ ;\ \frac{7}{5}\right\}}
\end{aligned}$$

5 $\left(-\frac{1}{2}x-5\right)\left(\frac{3}{4}x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x-5=0$ ou $\frac{3}{4}x+2=0$

$\Leftrightarrow x=-10$ ou $x=-\frac{8}{3}$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\left\{-10\ ;\ -\frac{8}{3}\right\}}$

6 $2x(5x-1)(2x+3)=0$

$\Leftrightarrow 2x=0$ ou $5x-1=0$ ou $2x+3=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{1}{5}$ ou $x=-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\left\{0\ ;\ \frac{1}{5}\ ;\ -\frac{3}{2}\right\}}$

7 $\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-4},\ x\neq -2$ et $x\neq 2$

$\Leftrightarrow \frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x^2-4},\ x\neq -2$ et $x\neq 2$

$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x^2-4}=\frac{1}{x^2-4},\ x\neq -2$ et $x\neq 2$

$\Leftrightarrow x-2=1,\ x\neq 2$ et $x\neq -2$

$\Leftrightarrow \boxed{x=3}$

8 $\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2x}{x-1},\ x\neq 1$

$\Leftrightarrow x^2+1=2x,\ x\neq 1$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0,\ x\neq 1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0,\ x\neq 1$

$\Leftrightarrow x=1,\ x\neq 1$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\varnothing}$

9 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=2,\ x\neq 0$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x(x+1)}+\frac{x}{x(x+1)}=\frac{2x(x+1)}{x(x+1)},\ x\neq 0$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow x+1+x=2x(x+1),\ x\neq 0$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow 2x+1=2x^2+2x,\ x\neq 0$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2},\ x\neq 0$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \boxed{S=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}}$

10 $\dfrac{2}{x-1} = 1 - \dfrac{x}{x+1},\ x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)},\ x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\Leftrightarrow 2(x+1) = x^2 - 1 - x(x-1),\ x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\Leftrightarrow 2x + 2 = x^2 - 1 - x^2 + x,\ x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\Leftrightarrow 2x + 2 - x^2 + 1 + x^2 - x = 0,\ x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0,\ x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\Leftrightarrow x = -3,\ x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\Leftrightarrow \boxed{S = \{-3\}}$

Corrigé de l'exercice 2.

1 $(3x-5)^2 = 16 \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} 3x - 5 = 4 \\ \text{ou} \\ 3x - 5 = -4 \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} 3x = 9 \\ \text{ou} \\ 3x = 1 \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

On a alors : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{3\ ;\ \dfrac{1}{3}\right\}}$.

2 $\left(x^2 - 4\right)^2 = 81 \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} x^2 - 4 = 9 \\ \text{ou} \\ x^2 - 4 = -9 \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} x^2 = 13 \\ \text{ou} \\ x^2 = -5 \quad \longleftarrow \text{impossible car } x^2 \geqslant 0 \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} x = \sqrt{13} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{13} \end{array}\right.$

On a alors : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{13}\ ;\ \sqrt{13}\right\}}$.

3 $\left(3x^2-4\right)^2=9 \iff \left(\begin{array}{l} 3x^2-4=3 \\ \text{ou} \\ 3x^2-4=-3 \end{array}\right.$

$$\iff \left(\begin{array}{l} 3x^2=7 \\ \text{ou} \\ 3x^2=1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left(\begin{array}{l} x^2=\dfrac{7}{3} \\ \text{ou} \\ x^2=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left(\begin{array}{lll} x=\sqrt{\dfrac{7}{3}} & \text{ou} & x=-\sqrt{\dfrac{7}{3}} \\ \text{ou} & & \\ x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \text{ou} & x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

On a alors : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\sqrt{\dfrac{7}{3}}\ ;-\sqrt{\dfrac{7}{3}}\ ;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ ;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}}$.

4 $\left(\dfrac{2x-1}{x-7}\right)^2=25 \iff \left\{\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \dfrac{2x-1}{x-7}=5 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1}{x-7}=-5 \end{array}\right. \\ x-7\neq 0 \end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \dfrac{2x-1}{x-7}-5=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1}{x-7}+5=0 \end{array}\right. \\ x\neq 7 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \dfrac{2x-1}{x-7}-\dfrac{5(x-7)}{x-7}=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1}{x-7}+\dfrac{5(x-7)}{x-7}=0 \end{array}\right. \\ x\neq 7 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \dfrac{2x-1}{x-7}-\dfrac{5x-35}{x-7}=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1}{x-7}+\dfrac{5x-35}{x-7}=0 \end{array}\right. \\ x\neq 7 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \dfrac{2x-1-5x+35}{x-7}=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2x-1+5x-35}{x-7}=0 \end{array}\right. \\ x\neq 7 \end{array}\right.$$

$$\left(\frac{2x-1}{x-7}\right)^2 = 25 \iff \begin{cases} \left(\begin{array}{l} 2x-1-5x+35=0 \\ \text{ou} \\ 2x-1+5x-35=0 \end{array}\right. \\ x \neq 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left(\begin{array}{l} -3x+34=0 \\ \text{ou} \\ 7x-36=0 \end{array}\right. \\ x \neq 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left(\begin{array}{l} x=\dfrac{34}{3} \\ \text{ou} \\ x=\dfrac{36}{7} \end{array}\right. \\ x \neq 7 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{36}{7}\ ;\ \frac{34}{3}\right\}}$.

■ Corrigé de l'exercice 3.

1 $\sqrt{3x-2} = 7 \iff \begin{cases} 3x-2 \geqslant 0 \\ 3x-2 = 7^2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 3x \geqslant 2 \\ 3x = 49+2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geqslant \dfrac{2}{3} \\ x = \dfrac{51}{3} = 17 \end{cases}$$

$17 \geqslant \frac{2}{3}$ donc l'ensemble solution de l'équation est : $\boxed{\mathscr{S} = \{17\}}$.

2 $\sqrt{\dfrac{5x-4}{3x+1}} = 3 \iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ 3x+1 \neq 0 \\ \dfrac{5x-4}{3x+1} = 9 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5x-4}{3x+1} - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5x-4}{3x+1} - \dfrac{9(3x+1)}{3x+1} = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{5x-4}{3x+1}} = 3 \iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5x-4-27x-9}{3x+1} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-22x-13}{3x+1} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ -22x-13 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{5x-4}{3x+1} \geqslant 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{3} \\ x = -\dfrac{13}{22} \end{cases}$$

On calcule maintenant $\dfrac{5x-4}{3x+1}$ pour $x = -\dfrac{13}{22}$ afin de voir si cette solution est valable :

$$\frac{5x-4}{3x+1} = 9 > 0.$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{13}{22}\right\}}$.

3 $\sqrt{x^2+x+1} = x+1 \iff \begin{cases} x^2+x+1 \geqslant 0 \\ x+1 \geqslant 0 \\ x^2+x+1 = (x+1)^2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x^2+x+1 \geqslant 0 \\ x \geqslant -1 \\ x^2+x+1 = x^2+2x+1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2+x+1 \geqslant 0 \\ x \geqslant -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

On vérifie que $x^2+x+1 \geqslant 0$ pour $x = 0$ (assez facilement) donc $\boxed{\mathscr{S} = \{0\}}$.

4 $x\sqrt{7}+\sqrt{2}=\sqrt{7}-x\sqrt{2} \iff x\sqrt{7}+x\sqrt{2}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
&\iff x\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)=\sqrt{7}-\sqrt{2}\\
&\iff x=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}\\
&\iff x=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}\\
&\iff x=\frac{\left(\sqrt{7}\right)^2-2\sqrt{7}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\\
&\iff x=\frac{9-2\sqrt{14}}{5}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{9-2\sqrt{14}}{5}\right\}}$.

5 $\sqrt{(x-2)(3x+4)}=2(3x+4) \iff \begin{cases} 2(3x+4)\geqslant 0\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (x-2)(3x+4)=\left[2(3x+4)\right]^2\end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 3x+4\geqslant 0\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (x-2)(3x+4)=4(3x+4)^2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x\geqslant -4\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (x-2)(3x+4)-4(3x+4)^2=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\geqslant -4/3\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (3x+4)\left[(x-2)-4(3x+4)\right]=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\geqslant -4/3\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (3x+4)(x-2-12x-16)=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\geqslant -4/3\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ (3x+4)(-11x-18)=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\geqslant -4/3\\ (x-2)(3x+4)\geqslant 0\\ \left(\begin{array}{l} 3x+4=0\\ \text{ou}\\ -11x-18=0\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\sqrt{(x-2)(3x+4)} = 2(3x+4) \iff \begin{cases} x \geqslant -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geqslant 0 \\ \left(\begin{array}{l} x = -\dfrac{4}{3} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{18}{11} \end{array} \right. \end{cases}$$

On regarde maintenant si $(x-2)(3x+4) \geqslant 0$ pour $x = -\dfrac{4}{3}$ et pour $x = -\dfrac{18}{11}$.

Pour $x = -\dfrac{4}{3}$, on obtient 0, donc cette valeur convient.

Pour $x = -\dfrac{18}{11}$, on obtient $\dfrac{400}{121} > -\dfrac{4}{3}$ donc cette valeur convient.

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{4}{3}\ ;\ -\dfrac{18}{11}\right\}}$.

■ Corrigé de l'exercice 4.

1 *a.* Dans le triangle équilatéral ABC, $\widehat{\text{ABC}} = 60°$.
Dans le triangle NBM rectangle en M,

$$\tan \widehat{\text{NBM}} = \frac{NM}{BM}$$

donc :

$$\tan 60° = \frac{NM}{x}.$$

On a donc :

$$\boxed{MN = x \tan 60° = x\sqrt{3}}$$

b. Par symétrie, $BM = QC = x$ et $MH = HQ = 3 - x$.
Donc, $MQ = 2 \times (3 - x)$, soit $\boxed{MQ = 6 - 2x}$.

2 On veut que MNPQ soit un carré.

a. La condition mène à l'égalité :

$$MQ = MN$$

c'est-à-dire, d'après la question 1 :

$$\boxed{x\sqrt{3} = 6 - 2x}$$

b. Si $x\sqrt{3} = 6 - 2x$, alors $x\sqrt{3} + 2x = 6$.
Ainsi, $\left(\sqrt{3} + 2\right) x = 6$, soit :

$$\boxed{x = \frac{6}{2 + \sqrt{3}}}$$

N.B. On aurait pu mettre le résultat de sorte que le dénominateur ne comporte pas de radical, comme il est de coutume de faire :

$$\begin{aligned}\frac{6}{2+\sqrt{3}} &= \frac{6\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}\\ &= \frac{12-6\sqrt{3}}{4-3}\\ &= 12-6\sqrt{3}\end{aligned}$$

et on peut aussi s'assurer que $x < 3$ en trouvant une valeur approchée :

$$x \approx 1,6.$$