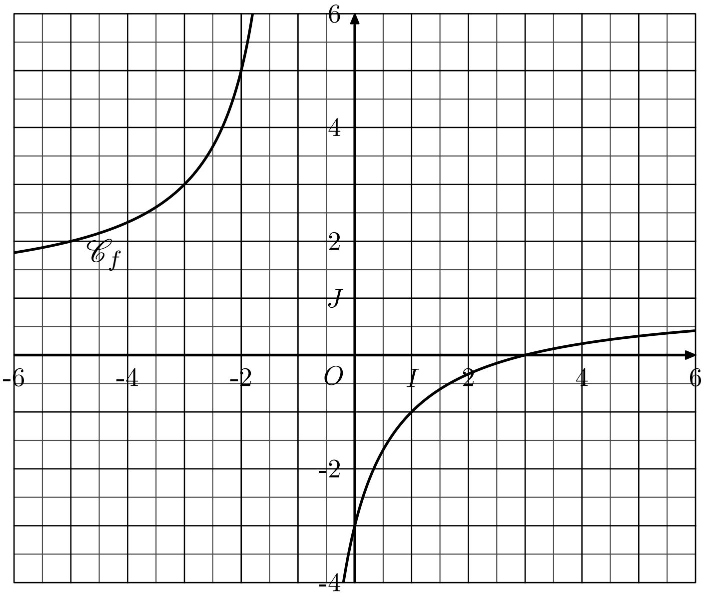
Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+1}$$

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ donné ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



1. a. Déterminer les coordonnées des deux points A et B de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse respective -2 et 3.

   b. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

   c. Tracer, dans le repère, la droite (AB).

2. On considère la droite (Δ) ayant pour équation réduite :
   (Δ): $y = -2x - 3$

   a. Déterminer algébriquement les solutions de l'équation :
   $f(x) \geqslant -2x - 3$

   b. En déduire la positition relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ relativement à la droite (Δ).

   c. Tracer la droite (Δ) dans le repère.

Correction 1

1. a. Par la fonction f, on a les images des nombres suivants :

   - $f(-2) = \dfrac{-2-3}{-2+1} = \dfrac{-5}{-1} = 5$
   - $f(3) = \dfrac{3-3}{3+1} = \dfrac{0}{4} = 0$

   Ainsi, les points A et B ont pour coordonnées :
   $A(-2\,;5)$; $B(3\,;0)$

   b. La droite (AB) a pour coefficient directeur :
   $$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-5}{3-(-2)} = \frac{-5}{5} = -1$$
   Ainsi, la droite (AB) admet pour équation réduite :
   $y = -x + b$ où $b \in \mathbb{R}$

   Le point B appartenant à la droite (AB), le réel b doit vérifier l'équation :
   $$0 = -3 + b$$
   $$b = 3$$
   Ainsi, la droite (AB) admet pour équation réduite :
   $y = -x + 3$

2. a. Résolvons l'inéquation suivante :
   $$f(x) \geqslant -2x - 3$$
   $$f(x) + 2x + 3 \geqslant 0$$
   $$\frac{x-3}{x+1} + 2x + 3 \geqslant 0$$
   $$\frac{x-3}{x+1} + \frac{(2x+3)(x+1)}{x+1} \geqslant 0$$
   $$\frac{x-3+(2x+3)(x+1)}{x+1} \geqslant 0$$
   $$\frac{x-3+2x^2+2x+3x+3}{x+1} \geqslant 0$$
   $$\frac{2x^2+6x}{x+1} \geqslant 0$$
   $$\frac{2x\cdot(x+3)}{x+1} \geqslant 0$$
   En étudiant les facteurs de premier degré du membre de gauche, on obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		-1		0		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2x\cdot(x+3)}{x+1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

   Cette inéquation admet pour ensemble de solutions :
   $\mathcal{S} = [-3\,;-1[\cup [0\,;+\infty[$

   b. De la question précédente, on en déduit la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ relativement à la droite (Δ).

   - La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la droite (Δ) sur chacun des intervalles : $[-3\,;-1[$ et $[0\,;+\infty[$
   - La courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la droite (Δ) sur chacun des intervalles : $]-\infty\,;-3[$ et $]-1\,;0]$

Voici les représentations des droites (d) et (Δ) dans le repère proposé :