1S$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°7 (2 heures)

Exercice 1 (2 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $$f(x) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$$

1. Démontrer que f est $\frac{2\pi}{5}$-périodique.
2. Calculer la dérivée f' de f.

Exercice 2 (4 points)

Un triangle ABC a pour aire $S = 5\text{ cm}^2$. De plus $c = AB = 13$ cm et $b = AC = 2$ cm.

Calculer la (ou les) longueur(s) possible(s) du troisième côté $a = BC$.

Exercice 3 (3 points)

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{4} - \sin^2 x$$

Exercice 4 (6 points)

1. Factoriser le polynôme : $2X^3 - X^2 - 5X - 2$
2. Résoudre, dans $]-\pi ; \pi]$, l'équation : $2\sin^3 x + \cos^2 x - 5\sin x - 3 = 0$ (On pourra poser $X = \sin x$)

Exercice 5 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

1. Étudier la parité de f.
2. Calculer la dérivée f'. En déduire le tableau de variations de f sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$.
3. Résoudre, dans $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, l'équation $f(x) = \sqrt{2}$.

1S$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°7 : CORRIGÉ

Exercice 1

1. Pour tout réel x, on a :

$$f\left(x+\frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left[5\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)+\frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(5x+2\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right) = f(x)$$

Donc f est $\frac{2\pi}{5}$-périodique.

2. On obtient :
$$f'(x) = 5\cos\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Exercice 2

D'après la formule de l'aire : $S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$ d'où $\sin \widehat{A} = \frac{2S}{bc} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$

En outre : $\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = 1$ d'où : $\cos^2 \widehat{A} = 1 - \sin^2 \widehat{A} = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$

Donc :
$$\cos \widehat{A} = \frac{12}{13} \text{ ou } \cos \widehat{A} = -\frac{12}{13}$$

D'après la formule d'Al-Kaschi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \widehat{A} = 173 - 52\cos \widehat{A} = 173 \pm 48$

Donc : $a^2 = 221$ ou $a^2 = 125$ et comme $a \geqslant 0$ (distance) : $a = \sqrt{221}$ ou $a = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

Exercice 3

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) &= [\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x]\,[\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x] \\ &= \frac{3}{4}\cos^2(x) - \frac{1}{4}\sin^2(x) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\sin^2(x) - \frac{1}{4}\sin^2(x) \\ &= \frac{3}{4} - \sin^2 x\end{aligned}$$

Remarque : en généralisant, on peut démontrer que : $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

Exercice 4

1. On repère une racine évidente $X = -1$, puis on factorise, on obtient (tous calculs faits) :
$$2(X+1)(X-2)(X+\frac{1}{2})$$

2. Posons $X = \sin x$, ainsi :
$$2X^3 + (1 - X^2) - 5X - 3 = 0$$
$$2X^3 - X^2 - 5X - 2 = 0$$

D'après 1 :
$$2(X+1)(X-2)(X+\frac{1}{2}) = 0$$

$$\sin x = -1 \quad \text{ou} \quad \sin x = 2 \text{ (impossible)} \quad \text{ou} \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$

Ce qui donne, (pour $x \in]-\pi\,;\,\pi]$) : $x = -\dfrac{\pi}{2}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6}$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6}$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

1. La fonction f est définie sur un domaine centré par rapport à 0 ($]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}[$)

   Pour tout réel $x \in]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}[$, on a : $f(-x) = \dfrac{1}{\cos(-x)} = \dfrac{1}{\cos x} = f(x)$

   Donc la fonction f est paire.

2. f est du type $f = \dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = \cos x$ donc sa dérivée est du type $f' = -\dfrac{v'}{v^2}$, ce qui donne :

   $$f'(x) = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

   Lorsque $x \in [0\,;\,\frac{\pi}{2}[$, on a toujours $\sin x \geqslant 0$, donc f est croissante sur $[0\,;\,\frac{\pi}{2}[$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$
Signe de la dérivée f'	0	$+$	||
Variations de la fonction f	1	$\nearrow$	$+\infty$ ||

$$f(0) = \frac{1}{\cos 0} = 1 \ ; \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+.$$

3. L'équation $f(x) = \sqrt{2}$ s'écrit : $\dfrac{1}{\cos x} = \sqrt{2}$

   En inversant les deux membres (qui sont non nuls), on obtient :

   $$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   D'où : $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{4}$