



Math93.com

Devoir Surveillé n°6

Correction

Inéquations

Durée 1 heure - Coeff. 4

Noté sur 20 points

Exercice 1. Inéquations

10 points

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'inéquation $(I_1) : \frac{4x-3}{4-5x} \leq 0$. On obtient $\mathcal{S}_1 =]-\infty; \frac{3}{4}] \cup [\frac{4}{5}; +\infty[$.

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
signe de $\frac{4x-3}{4-5x}$	$-$	0	$+$	$-$

2. Résoudre sur \mathbb{R} l'inéquation $(I_2) : (x-1)^2(1-2x) \leq 0$. On obtient $\mathcal{S}_2 = [\frac{1}{2}; +\infty[$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
signe de $(x-1)^2(1-2x)$	+	0	-	0	-

3. Résoudre sur \mathbb{R} l'inéquation $(I_3) : x - \frac{4x+1}{3} < 2$. On obtient $\mathcal{S}_3 =]-7; +\infty[$.

4. Résoudre sur \mathbb{R} l'inéquation $(I_4) : \frac{2-5x}{(x-1)x^2} \leq 0$. On obtient $\mathcal{S}_4 =]-\infty; 0[\cup]0; \frac{2}{5}] \cup]1; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{5}$	1	$+\infty$		
signe de $\frac{2-5x}{(x-1)x^2}$	—		—	0	+		—

Exercice 2. Lecture graphique et inéquation

6 points

On considère une fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-3}{1-4x}$.

1. [0,5 point] Déterminer l'ensemble de définition de f . $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$.

2. [2 points] Étudier le signe de $f(x)$ et retrouver graphiquement le résultat.

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$		
signe de $2x - 3$		-	-	0	+	
signe de $1 - 4x$		+	0	-	-	
signe de $f(x) = \frac{2x - 3}{1 - 4x}$		-		+	0	-

$$\boxed{f(x) > 0 \iff x \in \left] \frac{1}{4}; \frac{3}{2} \right]}; \quad \boxed{f(x) = 0 \iff x \in \left\{ \frac{3}{2} \right\}} \quad \text{et} \quad \boxed{f(x) < 0 \iff x \in \left] -\infty; \frac{1}{4} \right[\cup \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[}$$

[Bonus : +0.5 point] Pour trouver graphiquement les solutions de $f(x) > 0$ (respectivement $f(x) < 0$) il suffit de lire les abscisses des points de \mathcal{C}_f qui sont au dessus (resp. au dessous) de l'axe des abscisses.

3. [3 points] Résoudre l'inéquation $(I_5) : -2 < f(x) < 3$.

Il faut résoudre deux inéquations et prendre l'intersection des ensembles solutions :

- $(I'_5) : -2 < f(x) : \mathcal{S}'_5 = \left] -\infty; -\frac{1}{6} \right[\cup \left] \frac{1}{4}; +\infty \right[$

$$(I'_5) : -2 < f(x) \iff \frac{-6x-1}{1-4x} > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
signe de $\frac{-6x-1}{1-4x}$	+	0	-	+

- $(I''_5) : f(x) < 3 : \mathcal{S}''_5 = \left] -\infty; \frac{1}{4} \right[\cup \left] \frac{3}{7}; +\infty \right[$

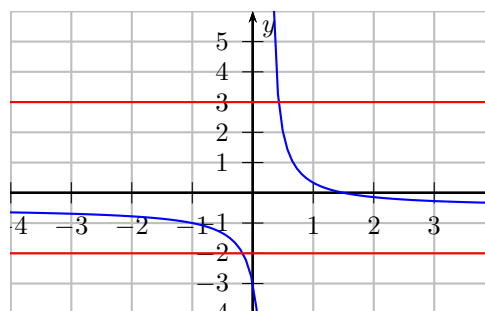
$$(I''_5) : f(x) < 3 \iff \frac{14x-6}{1-4x} < 0$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{7}$	$+\infty$
signe de $\frac{-6x-1}{1-4x}$	-	0	+	-

- $\mathcal{S}_5 = \mathcal{S}'_5 \cap \mathcal{S}''_5 = \left] -\infty; -\frac{1}{6} \right[\cup \left] \frac{3}{7}; +\infty \right[$

4. [0.5 point] Retrouver graphiquement le résultat précédent en expliquant brièvement la méthode utilisée.

Il suffit de tracer les droites d'équation $y = -2$ et $y = 3$ et de lire les abscisses des points de la courbe qui sont entre les deux droites.



Exercice 3. Lecture graphique et inéquation**3 points**

Sur le graphique suivant, on a tracé la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto f(x) = (-x - 1)(x - 2)$ et celle de la fonction $g : x \mapsto g(x) = (x + 1)^2$.

1. [1 point] Identifiez les courbes associées aux fonctions puis résolvez graphiquement l'inégalité $(I_6) : g(x) < f(x)$.

Il suffit par exemple de calculer une valeur, on a $f(0) = 2$ donc \mathcal{C}_f est la courbe en U inversé.

On obtient graphiquement : $\mathcal{S}_6 =]-1 ; \frac{1}{2}[$.

2. [2 points] Retrouver ensuite ce résultat par le calcul.

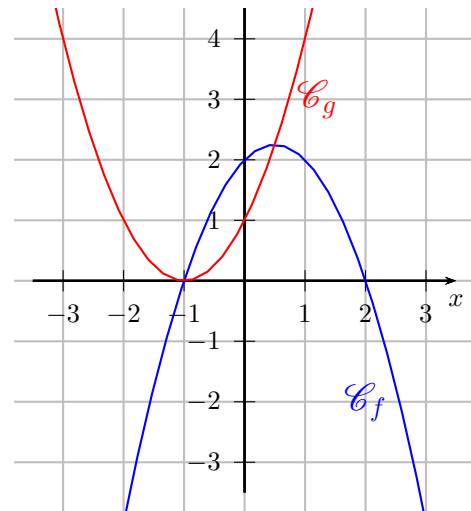
$$(I_6) \iff (x + 1)^2 - (-x - 1)(x - 2) < 0$$

$$(I_6) \iff (x + 1)^2 + (x + 1)(x - 2) < 0$$

$$(I_6) \iff (x + 1) \left[(x + 1) + (x - 2) \right] < 0$$

$$(I_6) \iff (x + 1)(2x - 1) < 0$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
signe de $x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
signe de $2x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$(x + 1)(2x - 1)$	$+$	0	$-$	$+$

**Exercice 4. Algorithme : Un spécial Sixtine****3 points**

1. Que calcule ce programme ?

Ce programme affiche le premier entier naturel qui vérifie l'inéquation $S^2 > 100 \times S$ ou qui ne vérifie pas l'inéquation $S^2 \leq 100 \times S$.

2. Retrouver le résultat du programme par un calcul.

On va résoudre dans \mathbb{R} puis dans \mathbb{N} l'inéquation $S^2 \leq 100 \times S$.

$$S^2 \leq 100 \times S \iff S(S - 100) \leq 0$$

$$S^2 \leq 100 \times S \iff S \in [0 ; 100]$$

Et donc le premier entier naturel qui ne vérifie pas cette inéquation est $S = 101$.