DEVOIR A LA MAISON N° 9

A RENDRE LE VENDREDI 29 AVRIL

Exercice 1 : *Fonction polynôme du second degré*

On considère la fonction $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$.

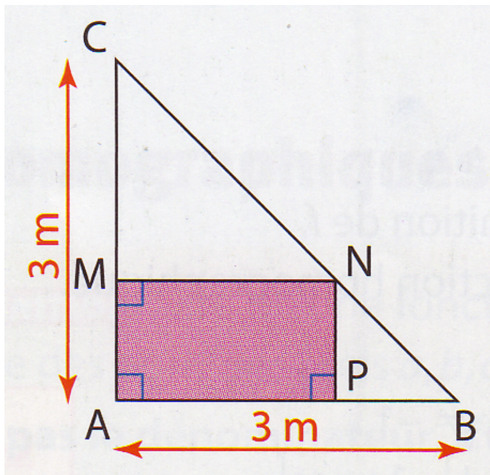
1. Ecrire f sous forme canonique et sous forme factorisée.
2. A l'aide des résultats du cours, en déduire le tableau de variations de f.
3. La fonction f admet-elle un minimum ? un maximum ? Si oui préciser sa valeur et en quel point il est atteint.
4. En quels points la courbe de la fonction f coupe-elle
   (a) l'axe des abscisses ?
   (b) l'axe des ordonnées ?

~~5. Résoudre :~~

$$\cancel{a) f(x) = -\frac{1}{2}}$$

: *Problème d'optimisation*

Un centre nautique possède l'enseigne lumineuse ci-contre en forme de triangle rectangle isocèle. Les points M, N et P sont tels que $AMNP$ soit un rectangle. On note x la longueur AM en mètres et $\mathcal{A}(x)$ l'aire en m^2 du rectangle $AMNP$.



1. A quel intervalle appartient x ?
2. Exprimer $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.
3. Ecrire $\mathcal{A}(x)$ sous forme canonique.
4. Quel est le maximum de cette aire ? A quelle position du point M cela correspond-il ?

CORRECTION DU DEVOIR A LA MAISON N° 9

Exercice 1 :

1. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 1)$. Or, $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ donc $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$ et $f(x) = -\frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - 9 + 1\right] = -\frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - 8\right] = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 4$.

   La forme canonique de f est $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 4$.

   $$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - 8\right] = -\frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - (\sqrt{8})^2\right] = -\frac{1}{2}(x-3-\sqrt{8})(x-3+\sqrt{8}) \\ &= -\frac{1}{2}(x-3-2\sqrt{2})(x-3+2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

   La forme factorisée de f est $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3-2\sqrt{2})(x-3+2\sqrt{2})$

2. Comme la forme canonique de f est $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 4 = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -\frac{1}{2}$, $\alpha = 3$ et $\beta = 4$. Comme $a = -\frac{1}{2} < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est une parabole tournée vers le bas.

   Vu que $\alpha = 3$ alors f est croissante sur $]-\infty\,; 3]$ et décroissante sur $[3\,; +\infty[$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$

3. D'après le tableau de variations de f, la fonction n'admet pas de minimum mais elle admet un maximum : il vaut 4 et est atteint en 3.

4. (a) La courbe coupe l'axe des abscisses lorsque $f(x) = 0$. On résout donc cette équation à l'aide de la forme factorisée de f.

   $$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x-3-2\sqrt{2})(x-3+2\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow (x-3-2\sqrt{2})(x-3+2\sqrt{2}) = 0$$

   Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Ainsi,

   $$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 - 2\sqrt{2} = 0 \text{ ou } x - 3 + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = 3 + 2\sqrt{2} \text{ ou } x = 3 - 2\sqrt{2}$$

   La fonction f coupe l'axe des abscisses aux points $A\,(3-2\sqrt{2}\,; 0)$ et $B\,(3+2\sqrt{2}\,; 0)$.

   (b) La courbe coupe l'axe des ordonnées lorsque $x = 0$; on calcule donc $f(0)$.

   $$f(0) = -\frac{1}{2} \times 0^2 + 3 \times 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

   La courbe coupe l'axe des ordonnées au point $C\,(0\,; -\frac{1}{2})$.

Exercice 4 :

1. Comme $x = AM$, alors x est une distance donc $x \geqslant 0$. De plus, $M \in [AC]$ donc $x \leqslant AC$ soit $x \leqslant 3$. Finalement, $x \in [0\,;\,3]$.
2. $\mathcal{A}(x) = AM \times MN$ car $AMNP$ est un rectangle. Pour déterminer MN, on applique le théorème de Thalès.
   - Les droites (AM) et (BN) sont sécantes en C.
   - Les droites (MN) et (AP) sont parallèles puisque les cotés opposé d'un rectangle sont parallèles.

   On en déduit que $\dfrac{CM}{CA} = \dfrac{MN}{AB}$. Or, $CM = CA - AM = 3 - x$ donc l'égalité des rapports précédents équivaut à $\dfrac{3-x}{3} = \dfrac{MN}{3} \Leftrightarrow MN = 3 - x$. On en déduit que $\mathcal{A}(x) = x(3-x) = 3x - x^2$
3. $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 3x = -(x^2 - 3x)$ et $x^2 - 3x + \dfrac{9}{4} = (x - \dfrac{3}{2})^2$.

   Ainsi, $\mathcal{A}(x) = -\left[(x - \dfrac{3}{2})^2 - \dfrac{9}{4}\right] = -\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4}$ est la forme canonique de $\mathcal{A}(x)$.
4. $\mathcal{A}(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -1$, $\alpha = \dfrac{3}{2}$, $\beta = \dfrac{9}{4}$. Comme $a < 0$, la fonction $\mathcal{A}$ (définie sur $[0\,;\,3]$ d'après la première question) est croissante sur $[0; \dfrac{3}{2}]$ et décroissante sur $[\dfrac{3}{2}\,; 3]$.

   $\mathcal{A}\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{4}$, $\mathcal{A}(0) = 0$ et $\mathcal{A}(3) = 3 \times 3 - 3^2 = 0$.

   Le tableau de variations de $\mathcal{A}$ est

x	0		$\frac{3}{2}$		3
$\mathcal{A}(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0

   Le maximum de l'aire est $\beta = \dfrac{9}{4}$, il est atteint pour $AM = x = \dfrac{3}{2}$, c'est-à-dire quand M est au milieu de $[AC]$.