

Exercice 1 : définition du produit scalaire

Soit ABC un triangle tel que $AB = 2$, $AC = 3$ et $BC = 4$. Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

Solution

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2 \right)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (9 - 4 - 16) = -\frac{11}{2}$$

Exercice 2 : produit scalaire et coordonnées

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 0,5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} m+1 \\ m-5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2-m \\ m+4 \end{pmatrix}$ avec $m \in \mathbb{R}$

Solution

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 5 + (-2) \times 7 = 1$

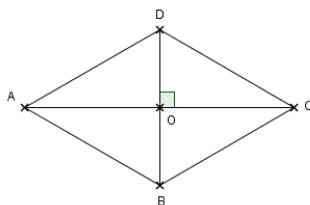
b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0,5 \times (-\sqrt{6}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} = 0$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (m+1)(2-m) + (m-5)(m+4) = -18$

Exercice 3 : produit scalaire et cosinus

ABD et BCD sont deux triangles équilatéraux avec $AB = 4$.

Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CD}$.



Solution

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = 4 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = 4 \times 4 \times \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -8$$

$$\left(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DC}\right) + \pi \ (2\pi) = \frac{\pi}{3} + \pi \ (2\pi) = \frac{4\pi}{3} \ (2\pi)$$

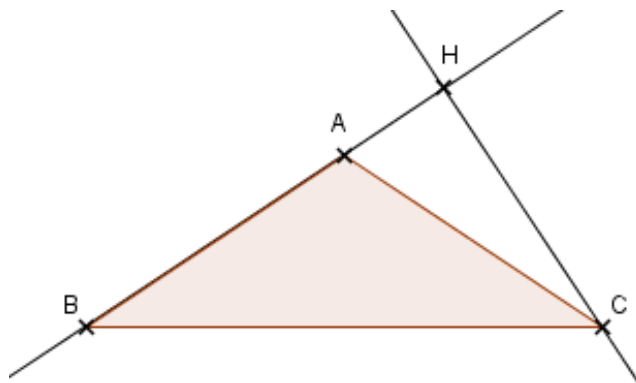
$$\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CD} = DO \times CD \times \cos\left(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{CD}\right) = 2 \times 4 \times \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -4$$

Exercice 4 : produit scalaire et projeté orthogonal

ABC est un triangle isocèle en A tel que $BC = 5$ et $AB = 3$

1) Calculer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$

2) Calculer BH où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) .



Solution

1) Soit I le milieu du segment $[BC]$ alors (AI) est la médiane issue de A dans le triangle ABC .

Comme ABC est un triangle isocèle alors (AI) est également la hauteur issue de A dans le triangle ABC donc (AI) est perpendiculaire à (BC) et $I \in (BC)$ donc I est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) .

Ainsi $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI} = BC \times BI$ car $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires et de même sens

$$\text{Donc } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 5 \times \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$$

2) Comme H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} = BH \times BA$.

$$\text{Donc } BH = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{BA} = \frac{25}{6}$$

Exercice 5 : Règles de calculs du produit scalaire

On donne un triangle ABC tel que $AB = 5$, $BC = 6$ et $CA = 7$.

Les points I et J sont définis par $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$

Déterminer $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC}$

Solution

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}((\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}) \cdot \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{BC}\right)$$

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{6}(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2) + \frac{1}{6}BC^2$$

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}(AC^2 - AB^2 - BC^2) + \frac{1}{6}BC^2$$

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}(7^2 - 5^2 - 6^2) + \frac{1}{6} \times 6^2$$

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC} = 3$$

Exercice 6 : vecteurs orthogonaux

Dans chacun des cas suivants, déterminer la ou les valeurs de x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ x+1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3x+2 \\ x+1 \end{pmatrix}$

Solution

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow 1 \times 6 + 3 \times (x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -3$

b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow (2x - 1)(3x + 2) + 2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow 3x(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 0$

Exercice 7 : théorème de la médiane

On considère un triangle ABC tel que $AB = 7$, $AC = 5$ et $BC = 8$.

On note I est le milieu de $[BC]$

Calculer la longueur AI .

Solution

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2 \Leftrightarrow 7^2 + 5^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}8^2$$

$$\Leftrightarrow 74 = 2AI^2 + 32$$

$$\Leftrightarrow 21 = AI^2$$

$$\Leftrightarrow AI = \sqrt{21} \text{ (car } AI > 0)$$

Exercice 8 : formules d'addition

Transformer en produit :

1) $A = \sin(a + b) + \sin(a - b)$

2) $B = \cos(a + b) + \cos(a - b)$

3) $C = \sin(a + b) - \sin(a - b)$

4) $D = \cos(a + b) - \cos(a - b)$

Solution

1) $A = \sin(a + b) + \sin(a - b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a + \sin a \cos b - \sin b \cos a = 2 \sin a \cos b$

2) $B = \cos(a + b) + \cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b = 2 \cos a \cos b$

3) $C = \sin(a + b) - \sin(a - b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a - \sin a \cos b + \sin b \cos a = 2 \sin b \cos a$

4) $D = \cos(a + b) - \cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b - \cos a \cos b - \sin a \sin b = -2 \sin a \sin b$

Exercice 9 : formules de duplication

1) Exprimer $\sin^2(2x)$ et $\cos^2(2x)$ en fonction de $\cos(4x)$

2) Démontrer que $\cos^4(x) + \sin^4(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(4x)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos^4(x) + \sin^4(x) = \frac{7}{8}$

Solution

1) $\sin^2(2x) = \frac{1 - \cos(4x)}{2} \quad \cos^2(2x) = \frac{1 + \cos(4x)}{2}$

2)

$$\begin{aligned} \cos^4(x) + \sin^4(x) &= (\cos^2(x))^2 + (\sin^2(x))^2 \\ &= \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1 + \cos(2x) + \cos^2(2x)}{4} + \frac{1 - \cos(2x) + \cos^2(2x)}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2(2x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \cos(4x)}{2} \right) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(4x) \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \cos^4(x) + \sin^4(x) &= \frac{7}{8} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(4x) &= \frac{7}{8} \\ \Leftrightarrow \cos(4x) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos(4x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z})$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) ; -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \right\}$$

Exercice 10 ∇ : lieux de points

A et B sont deux points tels que $AB = 6$.

I est le milieu du segment $[AB]$

Cas n°1 : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

- 1) Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
- 2) Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 18$
- 3) Déterminer l'ensemble E_3 des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -12$

Cas n°2 : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

- 1) Déterminer l'ensemble F_1 des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
- 2) Déterminer l'ensemble F_2 des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$
- 3) Déterminer l'ensemble F_3 des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9$
- 4) Déterminer l'ensemble F_4 des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -10$

Cas n°3 : $MA^2 + MB^2 = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

- 1) Déterminer l'ensemble G_1 des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 68$
- 2) Déterminer l'ensemble G_2 des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 18$
- 3) Déterminer l'ensemble G_3 des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 4$

Cas n°4 : $MA^2 - MB^2 = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

- 1) Déterminer l'ensemble H_1 des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 0$
- 2) Déterminer l'ensemble H_2 des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 36$

Solution

Cas n°1 : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

1)

$$M \in E_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux}$$

E_1 est la droite perpendiculaire à (AB) et passant par A

2) On note H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB)

$$M \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 18$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = 18$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires de même sens et } AH \times AB = 18$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires de même sens et } AH = 3$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow H = I$$

E_2 est la droite perpendiculaire à (AB) et passant par I.

3) On note H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB)

$$M \in E_3 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -12$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = -12$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires de sens contraire et } AH \times AB = -12$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires de sens contraire et } AH = -2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

E_3 est la droite perpendiculaire à (AB) et passant par le point K défini par $\overrightarrow{AK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Cas n°2 : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

1)

$$M \in F_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \text{ et } \overrightarrow{MB} \text{ sont orthogonaux.}$$

F_1 est le cercle de diamètre $[AB]$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$$

Comme I est le milieu du segment $[AB]$ alors $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$

$$\text{Donc } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{IA} \cdot (-\overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - 9.$$

2)

$$M \in F_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$$

$$\Leftrightarrow MI^2 - 9 = 7$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow MI = 4 \text{ car } MI \geq 0$$

F_2 est le cercle de centre I et de rayon 4.

3)

$$\begin{aligned} M \in F_3 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9 \\ &\Leftrightarrow MI^2 - 9 = -9 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow MI = 0 \end{aligned}$$

F_3 est le point I .

4)

$$\begin{aligned} M \in F_4 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -10 \\ &\Leftrightarrow MI^2 - 9 = -10 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = -1 \end{aligned}$$

F_4 est vide

Cas n°3 : $MA^2 + MB^2 = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$$

Comme I est le milieu du segment $[AB]$ alors $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $IB^2 = IA^2 = 9$

Donc $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 18$.

On peut également utiliser la formule de la médiane. $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

1)

$$\begin{aligned} M \in G_1 &\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 68 \\ &\Leftrightarrow 2MI^2 + 18 = 68 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = 25 \\ &\Leftrightarrow MI = 5 \text{ car } MI \geq 0 \end{aligned}$$

G_1 est le cercle de centre I et de rayon 5.

2)

$$\begin{aligned} M \in G_2 &\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 18 \\ &\Leftrightarrow 2MI^2 + 18 = 18 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow MI = 0 \end{aligned}$$

G_2 est le point I

3)

$$\begin{aligned} M \in G_3 &\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow 2MI^2 + 18 = 4 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = -14 \end{aligned}$$

G_3 est vide

Cas n°4 : $MA^2 - MB^2 = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

D'après la formule de la médiane, $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$

$$M \in H_1 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 0$$

1)

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \end{aligned}$$

H_1 est la droite perpendiculaire à (AB) et passant par le point I .

2) On note H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB)

$$M \in H_2 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{MI} \cdot \vec{BA} = 36$$

$$\Leftrightarrow \vec{MI} \cdot \vec{BA} = 18$$

$$\Leftrightarrow (\vec{MA} + \vec{AI}) \cdot \vec{BA} = 18$$

$$\Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{BA} + \vec{AI} \cdot \vec{BA} = 18$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{AB} - AI \times BA = 18 \text{ (car } \vec{AI} \text{ et } \vec{BA} \text{ colinéaires de sens contraires)}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{AB} - 18 = 18$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{AB} = 36$$

$$\Leftrightarrow \vec{AH} \text{ et } \vec{AB} \text{ sont colinéaires de même sens et } AH \times AB = 36$$

$$\Leftrightarrow \vec{AH} \text{ et } \vec{AB} \text{ sont colinéaires de même sens et } AH = 6$$

$$\Leftrightarrow H = B$$

H_2 est la droite perpendiculaire à (AB) et passant par le point B .

Exercice 11 : équations de droites et équations de cercles

Pour tout l'exercice, on se situe dans un repère orthonormé.

1) On considère les points $A(2 ; 1)$, $B(0 ; -2)$ et $C(-3 ; 5)$.

Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

2) Déterminer l'ensemble (E) des points $M(x ; y)$ vérifiant l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 6 = 0$.

Préciser les éléments caractéristiques de cet ensemble.

3) Même question avec l'ensemble (F) des points $m(x ; y)$ vérifiant $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 19 = 0$.

4) Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(4 ; 5)$ et $B(-2 ; 7)$.

Solution

1) Soit (h) la hauteur issue de A dans le triangle ABC . Les droites (BC) et (h) sont donc perpendiculaires. Donc $\vec{BC}$ est un vecteur normal à (h) .

Or $\vec{BC}(-3; 7)$ donc une équation de (h) est $-3x + 7y + c = 0$.

De plus, (h) passe par A donc $-3 \times 2 + 7 \times 1 + c = 0$. Par conséquent, $c = -1$.

Une équation de (h) est donc $-3x + 7y - 1 = 0$

2) La forme canonique de $x^2 - 2x$ est $(x - 1)^2 - 1$.

Celle de $y^2 + 8y$ est $(y + 4)^2 - 16$.

Donc $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 4)^2 - 16 - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 23$.

L'ensemble (E) est donc le cercle de centre $I(1 ; -4)$ et de rayon $r = \sqrt{23}$.

3) On procède de même : $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 19 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 4)^2 + 19 - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = -2$.

Or, pour tous réels x et y , $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 \geq 0$ et $-2 < 0$. Par conséquent, l'équation n'est vérifiée pour aucune valeur de x et y . Donc (F) est l'ensemble vide.

4) Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ ou encore $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$.

Or $\vec{AM}(x - 4; y - 5)$ et $\vec{BM}(x + 2; y - 7)$. Donc $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$.

$\vec{BM} = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 2) + (y - 5)(y - 7) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 12y + 27 = 0$.