Exercice 1

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f\colon x \longmapsto \frac{2-6x}{1-2x}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer la valeur des réels a et b vérifiant :
$$\frac{2-6x}{1-2x} = \frac{a}{1-2x} + b$$
3. En déduire que la fonction f est décroissante sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

Correction 1

1. Une fraction étant définie seulement si son dénominateur est nul. L'ensemble de définition de la fonction f ne contient pas les valeurs annulant $1-2x$:
$$D_f = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$$
2. $$\frac{a}{1-2x} + b = \frac{a}{1-2x} + \frac{b(1-2x)}{1-2x}$$
$$= \frac{a+b(1-2x)}{1-2x} = \frac{-2bx+a+b}{1-2x}$$
Par identification avec la fraction $\frac{3-6x}{1-2x}$, on obtient le système : $\begin{cases} -6 = -2b \\ 2 = a+b \end{cases}$.
On en déduit l'égalité : $\frac{2-6x}{1-6x} = \frac{-1}{1-2x} + 3$
3. Prenons deux nombres a, b de l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ tels que $a<b$:
$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} < & a & < b \\ -1 > & -2a & > -2b \\ 0 > & 1-2a & > 1-2b \end{array}$$
La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_-$
$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{1-2a} & < & \frac{1}{1-2b} \\ \frac{-1}{1-2a} & > & \frac{-1}{1-2b} \\ \frac{-1}{1-2a}+3 & > & \frac{-1}{1-2b}+3 \\ f(a) & > & f(b) \end{array}$$
On en déduit que la fonction f est décroissante sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$