

FONCTIONS 3 – POLYNÔMES DE DEGRÉ 2

12.2

Ex 1 - Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$x \mapsto 2x^2 - 16x + 24$$

- 1) Écrire $f(x)$ sous forme canonique, puis factoriser.
- 2) Étudier les variations de f puis faire un tableau de variations.
- 3) Représenter graphiquement f .

Dans les questions suivantes, on choisira la forme la plus adaptée de $f(x)$:

- 4) Calculer les images de 4, 0 et 6.
- 5) Déterminer le ou les antécédents de 0 par f .
- 6) Résoudre l'équation $f(x) = 24$.
- 7) Montrer que pour tout réel x , on a $f(x) \geq -8$.

Ex 2 - Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$x \mapsto 2x^2 + 3x + 5$$

- 1) Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
- 2) Déterminer les variations de f et faire un tableau de variations.
- 3) Quelle est la nature de Cf ? Quelles sont les coordonnées de son sommet ?
- 4) Tracer Cf ainsi que la parabole P d'équation $y = x^2$
- 5) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < x^2$.

Ex 3 - Soit ABCD un carré de côté 10cm.

M et N appartiennent respectivement aux côtés [AB] et [AD], et sont tels que $AM = DN$.

P est tel que AMPN soit un rectangle.

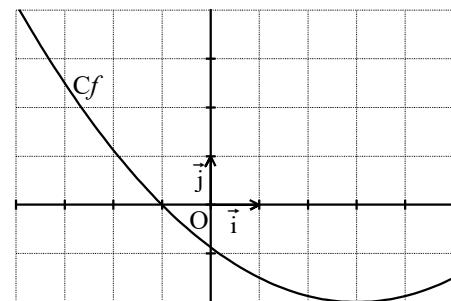
On pose $AM = x$ et on note $f(x)$ l'aire de AMPN.

- 1) A quel intervalle appartient x ?
- 2) Exprimer $f(x)$ en fonction de x .
- 3) Montrer que f admet un extremum que l'on caractérisera.
- 4) Déterminer la nature de Cf ainsi que les coordonnées de son sommet.
- 5) Quelle est la plus grande aire possible pour le rectangle AMPN ? Justifier.

Ex 4 - Soit C la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$, M un point de C , H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et A le point de coordonnées $(2 ; 0)$. On cherche à déterminer la position de M pour laquelle la distance AM est la plus petite possible. On pose $x_M = x$ et $f(x) = AM^2$.

- 1) Faire une figure en choisissant un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité 4cm et placer approximativement M.
- 2) Montrer que pour $x \in [0 ; 2] : f(x) = x^2 - 3x + 4$
- 3) Écrire $f(x)$ sous forme canonique et montrer que f admet un minimum que l'on précisera.
- 4) Justifier rapidement pourquoi minimiser AM^2 permet de minimiser aussi AM. En déduire la valeur minimum de AM et la position de M associée.

Ex 5 - Soit f la fonction polynôme de degré 2 représentée ci-dessous.



- 1) Lire les coordonnées du sommet de la parabole puis celles du point d'intersection de Cf avec l'axe des abscisses.
- En déduire la forme canonique de $f(x)$.
- 2) Déterminer les coordonnées de l'autre point d'intersection avec l'axe des abscisses.
- 3) Justifier que pour tout réel x , $f(x) \geq -2$

Ex 6 - Soit f définie sur \mathbb{R} par : $x \mapsto -x^2 + 2x - 3$

- 1) Étudier le signe de $f(x)$ puis interpréter graphiquement.
- 2) Déterminer la nature Cf ainsi que les coordonnées de son sommet.

Ex 7 - Soit f une fonction polynôme du second degré de forme canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ où a est strictement positif.

- 1) Sans utiliser les résultats du cours sur les fonctions polynômes, montrer que f admet un extremum que l'on précisera.
- 2) Déterminer de même les variations de f .

Ex 8 - Soit P la parabole d'équation $y = x^2$ et d la droite d'équation $y = 2ax - 1$.

On cherche à quelles conditions sur le réel a , la parabole et la droite se coupent et combien elles ont de points d'intersection.

- 1) Montrer que le problème revient à étudier l'équation $(x - a)^2 = a^2 - 1$.
- 2) Si $a^2 - 1 > 0$, l'équation admet combien de solutions ? (On ne cherchera pas ces solutions !) A quelles valeurs de a ce cas correspond-il ?
- 3) Si $a = 1$ ou $a = -1$: Combien y a-t-il d'intersections ? Quelles sont leurs coordonnées ? Faire une figure pour $a = 1$.
- 4) Quels sont les cas restants ? Combien y a-t-il alors d'intersections ?

Ex 9 - On lance une balle en l'air. La hauteur h de la balle en m au bout de t secondes est $h = 20t - 5t^2$

- 1) Au bout de combien de secondes la balle retouche-t-elle le sol ?
- 2) Quelle est la hauteur maximum atteinte ?