Math93.com

Devoir Surveillé n°3A Correction

Première ES/L

Second degré

Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 20 points

Exercice 1. Équation bicarrée — 2 points

Résoudre l'équation $(E_1)\ :\ x^4 - x^2 - 2 = 0$.

En posant $X = x^2$ on obtient :

$$(E_1)\ :\ x^4 - x^2 - 2 = 0 \iff \begin{cases} X = x^2 \\ X^2 - X - 2 = 0 \end{cases}$$

On se ramène donc à une équation du second degré de la forme $aX^2 + bX + c$ avec :

$$\begin{cases} a = & 1 \\ b = & -1 \\ c = & -2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 9 > 0$$

L'équation en X admet donc deux solutions réelles qui sont :

$$X_1 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1 \text{ et } X_2 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2$$

Il reste alors à résoudre l'équation en x soit $X = x^2$:

$$\begin{cases} X_1 = -1 = x^2 & : \text{impossible} \\ X_2 = 2 = x^2 & \iff \left(x = \sqrt{2}\right) \text{ ou } \left(x = -\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

Les solutions de l'équation (E_1) sont donc : $\underline{\sqrt{2} \text{ et } -\sqrt{2}}$.

Exercice 2. Bénéfice — $2 + 1 = 3$ points

1. **Résoudre l'inéquation : $(I_2)\quad :\quad -2x^2 + 60x - 250 \geq 0$.**
   Le trinôme $-2x^2 + 60x - 250$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

   $$\begin{cases} a = & -2 \\ b = & 60 \\ c = & -250 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 1\,600 > 0$$

   Les deux racines sont donc :

   $$x_1 = \frac{-60 - \sqrt{1\,600}}{-4} = 25 \text{ et } x_2 = \frac{-60 + \sqrt{1\,600}}{-4} = 5$$

   Donc $-2x^2 + 60x - 250$ est négatif (signe de $a = -2$) à l'extérieur des racines et positif sur $[5\ ;\ 25]$. De ce fait :

   $$\boxed{\mathscr{S} = [5\,;\,25]}$$

2. **Le bénéfice total de fabrication de <u>x milliers de smartphones</u>, exprimé en <u>milliers d'euros</u> (k€), est donné par : $B(x) = 60x - 2x^2$. En utilisant la question 1., déterminer la production permettant de réaliser un bénéfice supérieur à 250 000 euros.**
   Le problème revient à résoudre l'inéquation :

   $$B(x) = 60x - 2x^2 \geq 250 \iff -2x^2 + 60x - 250 \geq 0 \iff x \in [5\,;\,25]$$

   La production permettant de réaliser un bénéfice supérieur à 250 000 euros est donc comprise <u>entre 5 000 et 25 000 smartphones</u>.

Exercice 3. Optimisation de bénéfice — 15 points

Une entreprise fabrique chaque jour x objets avec $x \in [0\ ;\ 60]$. Le coût total de production de ces objets, exprimé en euros, est donné par :

$$C(x) = x^2 - 20x + 200$$

1. [2 pts] Calculer le nombre d'objets fabriqués correspondant à un coût de 500 euros.

Le coût total de production de ces objets, exprimé en euros, est donné par $C(x) = x^2 - 20x + 200$ donc on cherche x tel que :

$$C(x) = 500 \iff x^2 - 20x + 200 = 500 \iff x^2 - 20x - 300 = 0$$

Le trinôme $x^2 - 20x - 300$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = & 1 \\ b = & -20 \\ c = & -300 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 1\,600 > 0$$

Les deux racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-20 - \sqrt{1\,600}}{2} = -10 \notin [0\ ;\ 60] \text{ et } x_2 = \frac{-20 + \sqrt{1\,600}}{2} = 30 \in [0\ ;\ 60]$$

L'unique solution dans l'intervalle $[0\ ;\ 60]$ est 30, le nombre d'objets fabriqués correspondant à un coût de 500 euros est donc de <u>30</u>.

2. [1.5 points] Étudier les variations de C sur $[0\ ;\ 60]$ et dresser le tableau de variation en faisant figurer $C(0)$ et $C(60)$.

La fonction C est une fonction polynôme du second degré avec : $a = 1$; $b = -20$; $c = 200$. Le coefficient $a = 1 > 0$ étant positif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un minimum, de coordonnées :

$$S\left(\alpha = \frac{-b}{2a}\ ;\ f(\alpha)\right) \quad ; \quad \boxed{S\,(10\ ;\ 100)}$$

x	0		$\alpha = 10$		60
C	$C(0) = 200$	$\searrow$	100	$\nearrow$	$C(60) = 2\,600$

3. [0,5 point] Chaque objet fabriqué est vendu au prix unitaire de 34 euros. La recette est $\boxed{R(x) = 34x}$.

4. [1 point] Le bénéfice réalisé pour la production et la vente de x objets est donné, pour $x \in [0\ ;\ 60]$, en faisant la différence des recettes et des coûts soit :

$$\boxed{g(x) = 34x - \left(x^2 - 20x + 200\right) = -x^2 + 54x - 200}$$

5. [1.5 points] Variations de g sur $x \in [0\ ;\ 60]$ et tableau de variation en faisant figurer $g(0)$ et $g(60)$.

La fonction B est une fonction polynôme du second degré avec : $a = -1$; $b = 54$; $c = -200$. Le coefficient $a = -1 < 0$ étant négatif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un maximum, de coordonnées :

$$S'\left(\alpha = \frac{-b}{2a}\ ;\ g(\alpha)\right) \quad ; \quad \boxed{S'\,(27\ ;\ 529)}$$

x	0		4		$\alpha = 27$		50		60
B	$B(0) = -200$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	529	$\searrow$	0	$\searrow$	$B(60) = -560$

6. **[1 point] En déduire la quantité à produire permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal ?**
Le bénéfice maximal est donc de **529 euros**, obtenu pour une production de **27 objets**.

7. **[2 points] Résoudre l'inéquation $B(x) \geq 0$.**

$$B(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 54x - 200 \geq 0$$

Or le trinôme du second degré $-x^2 + 54x - 200$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$; $b = 54$; $c = -200$.

$$\Delta = 2\,116 > 0 \Rightarrow x_1 = 4 \text{ et } x_2 = 50$$

Le signe du trinôme est alors donnée par :

x	0		4		50		60
signe de $-x^2 + 54x - 200$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{B(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [4\,;\,50]}$$

Déduire de la question précédente les quantités que l'entreprise doit produire et vendre pour que la production soit rentable.
L'entreprise doit donc vendre entre **4 et 50 objets** pour que la production soit rentable.

8. **[1,5 points] Sur le deuxième graphique de l'annexe, on a tracé $\mathscr{C}_C$, la courbe représentative de la fonction C. Construire $\mathscr{C}_R$, la courbe représentative de la fonction recette R et expliquer comment graphiquement retrouver le résultat de la question précédente.**

9. **[1.5 point] Retrouver graphiquement le bénéfice maximal. Expliquez votre raisonnement et visualisez ce bénéfice maximal sur le graphique à l'aide de couleur.**
Ce bénéfice maximal correspond à l'écart maximal entre la droite et la courbe des coûts $\mathscr{C}_f$ entre 4 et 50.

10. **[1.5 points] Construire $\mathscr{C}_B$, la courbe représentative de la fonction B.**

11. **[1 point] Expliquer alors à l'aide de la courbe représentative de B, comment on retrouve facilement la réponse de la question 7.**
Résoudre graphiquement l'inéquation $B(x) \geq 0$ c'est trouver les abscisses des points de la courbe des bénéfices qui sont au dessus de l'axe des abscisses. On retrouve alors l'intervalle $[4\,;\,50]$.

Annexe à rendre avec votre copie

Graphique de l'exercice 3