

Suites : exercices

Les réponses aux questions sont disponibles à la fin du document

Exercice 1 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = n^2 - n + 1$.

- Calculer U_0 et U_{10} .
- Exprimer, en fonction de n , $U_n + 1$ et U_{n+1} .

Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \frac{1}{n+1}$.

- Exprimer $U_{n+1} - U_n$ en fonction de n .
- En déduire le sens de variation de la suite (U_n) .

Exercice 3 :

Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison $a = \frac{1}{2}$.

- Exprimer U_n en fonction de n .
- Calculer U_{10} et $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{10}$.

Exercice 4 :

Soit (U_n) la suite arithmétique telle que $U_4 = 5$ et $U_{11} = 19$.

Calculer la raison a et U_0 .

Exercice 5 :

Calculer les sommes suivantes :

- $S_1 = 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 121$
- $S_2 = 5 + 2 - 1 - 4 - 7 - \dots - 34$.

Exercice 6 :

Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 7$ et de raison $b = 3$.

- Exprimer U_n en fonction de n .
- Calculer U_5 et $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_5$.

Exercice 7 :

Calculer la somme $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots + \frac{1}{512}$.

Exercice 8 :

On suppose que chaque année la production d'une usine subit une baisse de 4%.

Au cours de l'année 2000, la production a été de 25000 unités.

- On note $P_0 = 25000$ et P_n la production prévue au cours de l'année $(2000+n)$.

Montrer que (P_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

- Calculer la production de l'usine en 2005.

Exercice 9 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 6$ et $U_{n+1} = \frac{3+2U_n}{5}$ (pour tout $n \geq 0$).

- On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 1$ (pour tout $n \geq 0$).

Montrer que $V_{n+1} = \frac{2}{5}V_n$ (pour tout $n \geq 0$).

En déduire que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison b et le premier terme V_0 .

b) Déduire de la question précédente que $U_n = 1 + 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$. (pour tout $n \geq 0$).

c) Montrer que $U_{n+1} - U_n = -3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$. (pour tout $n \geq 0$).

En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

d) Exprimer en fonction de n la somme : $V_0 + V_1 + \dots + V_n$.

En déduire que $U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{25}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) + n + 1$. (pour tout $n \geq 0$).

Réponses exercice 1 :

a) $U_0 = 0^2 - 0 + 1 = 1$ et $U_{10} = 10^2 - 10 + 1 = 91$.

b) $U_n + 1 = (n^2 - n + 1) + 1 = n^2 - n + 2$

$U_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1$.

Réponses exercice 2 :

a) $U_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2}$

Donc, $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$.

b) Pour tout n , $U_{n+1} - U_n < 0$. Donc la suite est décroissante.

Réponses exercice 3 :

a) $U_n = U_0 + n \times a = 4 + \frac{1}{2}n$.

b) $U_{10} = 4 + \frac{1}{2} \times 10 = 9$.

$U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{10} = 11 \times \frac{4+9}{2} = \frac{143}{2}$.

Réponses exercice 4 :

$U_{11} = U_4 + (11-4) \times a \Leftrightarrow 19 = 5 + 7a \Leftrightarrow a = 2$.

$U_4 = U_0 + 4 \times a \Leftrightarrow 5 = U_0 + 8 \Leftrightarrow U_0 = -3$.

Réponses exercice 5 :

a) $S_1 = 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 121$ (somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2).

nombre de termes = $\frac{121-5}{2} + 1 = 59$.

$S_1 = 59 \times \frac{5+121}{2} = 3717$

b) $S_2 = 5 + 2 - 1 - 4 - 7 - \dots - 34$ (somme des termes d'une suite arithmétique de raison -3).

nombre de termes = $\frac{-34-5}{-3} + 1 = 14$.

$S_2 = 14 \times \frac{5-34}{2} = -203$

Réponses exercice 6 :

a) $U_n = b^n \times U_0 = 7 \times 3^n$.

b) $U_5 = 7 \times 3^5 = 1701$.

$U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_5 = 7 \times \frac{1-3^6}{1-3} = 2548$.

Réponses exercice 7 :

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $b = -\frac{1}{2}$.

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots + \frac{1}{512}.$$

$$-\frac{1}{2}S = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots - \frac{1}{1024}.$$

En effectuant la différence des deux lignes, on obtient :

$$\frac{3}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{1024} = \frac{513}{1024}. \text{ D'où } S = \frac{513}{1024} \times \frac{2}{3} = \frac{171}{512}.$$

Réponses exercice 8 :

a) Pour tout n , $P_{n+1} = P_n - \frac{4}{100}P_n = \left(1 - \frac{4}{100}\right)P_n = 0,96 \times P_n$.

Cela prouve que (P_n) est une suite géométrique de raison 0,96.

b) $P_5 = b^5 \times P_0 = (0,96)^5 \times 25000 \approx 20384$.

Réponses exercice 9 :

a) $V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \frac{3 + 2U_n}{5} - 1 = \frac{2U_n - 2}{5} = \frac{2}{5}(U_n - 1) = \frac{2}{5}V_n$.

La suite (V_n) est donc géométrique de raison $b = \frac{2}{5}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 1 = 5$.

b) $V_n = b^n \times V_0 = 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Or, $V_n = U_n - 1$. Donc, $U_n = 1 + V_n = 1 + 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

c) $U_{n+1} - U_n = 1 + 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 1 - 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n = 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

$$= 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \left(\frac{2}{5} - 1\right) = 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n < 0.$$

La suite (U_n) est bien décroissante.

d) $V_0 + V_1 + \dots + V_n = V_0 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{3}{5}} = \frac{25}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$.

$$U_0 + U_1 + \dots + U_n = (V_0 + 1) + (V_1 + 1) + \dots + (V_n + 1)$$

$$= V_0 + V_1 + \dots + V_n + (n+1) = \frac{25}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) + n+1.$$