Correction du devoir de mathématiques
Du lundi 28 avril 2014

EXERCICE 1

Relation de Chasles **(2 points)**

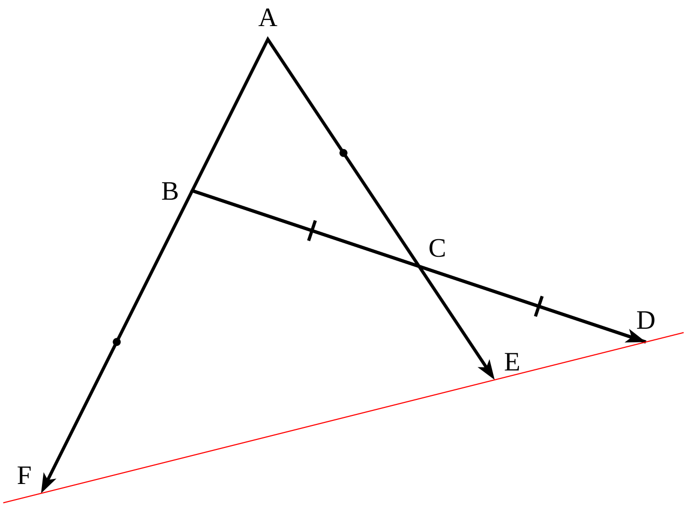
1) $\vec{u} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

2) $\vec{v} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}$

EXERCICE 2

Vecteurs sans coordonnées **(4 points)**

1) On obtient la figure suivante :



Les points D, E et F semblent alignés.

2) On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}\\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{CA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

3) On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}\\ &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BA}\\ &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB}\\ &= 3\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

4) Des questions 2 et 3, on déduit que : $\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{DE}$. Les vcteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et donc les points D, E et F sont alignés

Exercice 3

Algorithme **(5 points)**

1) On pose I(x_1,y_1). On obtient les tableaux suivants en faisant fonctionner l'algorithme :

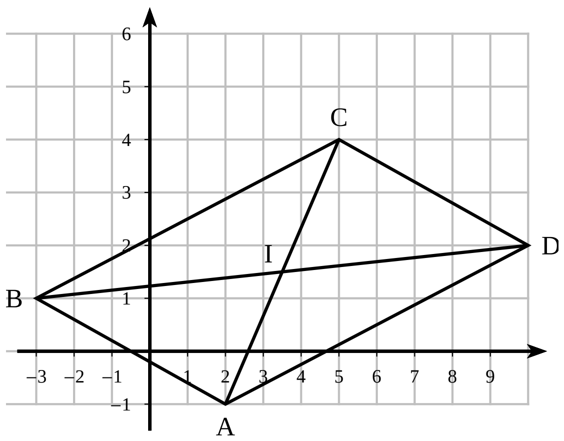
a)

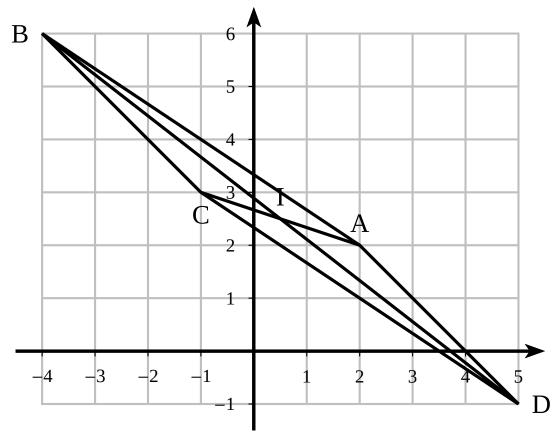
	A	B	C	I	D
x	2	−3	5	7/2	10
y	−1	1	4	3/2	2

b)

	A	B	C	I	D
x	2	−4	−1	1/2	5
y	2	6	3	5/2	−1

2) On obtient les deux graphiques suivants :



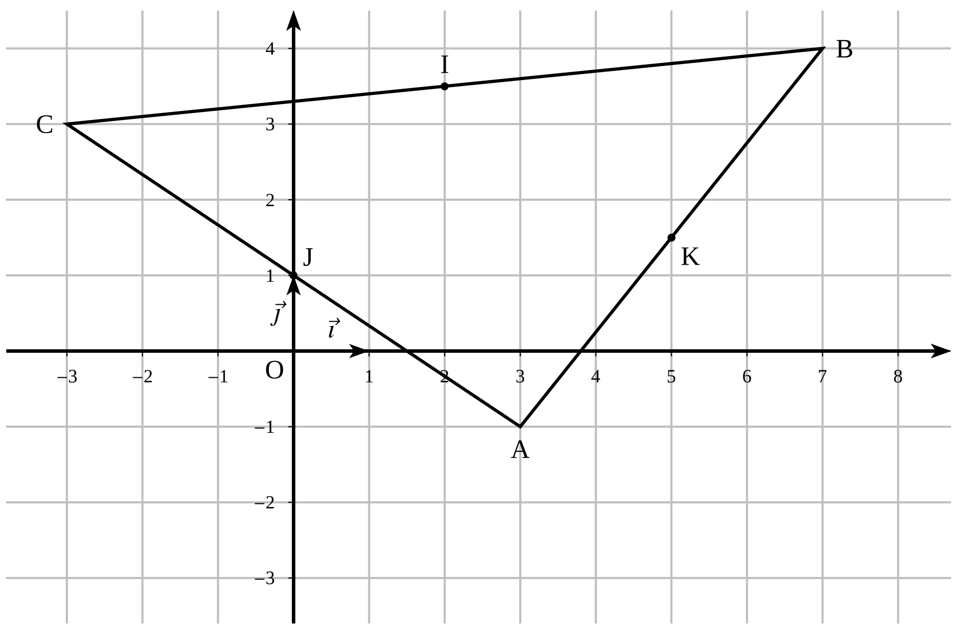


3) Cet algorithme permet de déterminer les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme. En effet il calcule d'abord les coordonnées du milieu I de [AC], puis il calcule les coordonnées de D pour que I soit aussi le milieu de [BD].

Exercice 4

Distance et milieu **(6 points)**

1) On a la figure suivante :



2) On a :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7-3 \\ 4-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3-3 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3-7 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3) On a :

$$\mathrm{I} = \left(\frac{7-3}{2}; \frac{4+3}{2}\right) = \left(2; \frac{7}{2}\right) \quad , \quad \mathrm{J} = \left(\frac{3-3}{2}; \frac{-1+3}{2}\right) = (0;1)$$

$$\mathrm{K} = \left(\frac{3+7}{2}; \frac{-1+4}{2}\right) = \left(5; \frac{3}{2}\right)$$

4) On a les distances suivantes :

$$\mathrm{AB} = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41} \quad , \quad \mathrm{AC} = \sqrt{(-6)^2+5^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$
$$\mathrm{BC} = \sqrt{(-10)^2+(-1)^2} = \sqrt{101}$$

5) Le triangle ABC n'est pas isocèle car : $\mathrm{AB} \neq \mathrm{AC}$, $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BC}$ et $\mathrm{AC} \neq \mathrm{BC}$

6) Le triangle ABC n'est pas rectangle car (le grand côté étant BC) on a :

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 41 + 52 = 93 \quad \text{et} \quad \mathrm{BC}^2 = 101 \quad \text{donc} \quad \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 \neq \mathrm{BC}^2$$

Exercice 5

Colinéarité et orthogonalité **(3 points)**

1) On a : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ x-2 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-2 & 4 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = 4$$

On obtient alors les solutions : $x-2 = 2$ ou $x-2 = -2$ soit $x = 4$ ou $x = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, $x = 4$ ou $x = 0$.

2) D'après le critère des vecteurs orthogonaux, on obtient :

$$xx' + yy' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4(x-2) + 1(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $x = 2$.