$1S_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°1 (2 heures)

<u>Exercice 1</u> (4 points)

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $(x - 2)(x + 5) = 0$
2. $x^2 + 3x = 0$
3. $x^2 - 8 = 0$
4. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

<u>Exercice 2</u> (4 points)

On donne le trinôme du second degré P défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 4\,x^2 - (\sqrt{6} + 4\sqrt{3}\,)x + 3\sqrt{2}$$

1. Montrer que P admet $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ pour racine.
2. Trouver l'autre racine (en valeur exacte).

<u>Exercice 3</u> (4 points)

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (x^2 + 1)^2 - (4x + 2)^2$.

1. Montrer que P est une fonction polynôme dont on précisera le degré.
2. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

<u>Exercice 4</u> (2 points)

Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = a\,x^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)

Démontrer que :

Si a et c sont de signes opposés alors P admet au moins une racine réelle

<u>Exercice 5</u> (4 points)

Résoudre l'inéquation : $-x^4 + 17\,x^2 - 16 \geqslant 0$

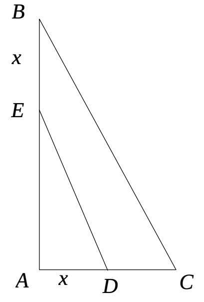
<u>Exercice 6</u> (2 points)

Dans un triangle ABC rectangle en A, on place les points D et E respectivement sur $[AC]$ et $[AB]$ tels que $AD = BE = x$.

(Voir figure ci-contre) .

Déterminer x pour que l'aire du triangle ADE soit égale à la moitié de l'aire de celle du triangle ABC.

Données : $AB = 18\text{m}$; $AC = 8\text{m}$.



1S$_1$: DS 1 CORRIGÉ (succinct)

Exercice 1

1. On a : $x - 2 = 0$ ou $x + 5 = 0$ d'où $S = \{-5 ; 2\}$.
2. En factorisant par x, on obtient : $x(x + 3) = 0$. D'où $S = \{-3 ; 0\}$.
3. En factorisant, à l'aide de l'identité $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, on obtient : $(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) = 0$, d'où $S = \{-2\sqrt{2} ; 2\sqrt{2}\}$.
4. En remarquant que $x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$, on peut immédiatement factoriser l'équation : $x^2(x + 1) + x + 1 = 0$, d'où $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$. On en déduit : $S = \{-1\}$.

Exercice 2

1. On calcule : $P\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right) = 4 \times \dfrac{6}{16} - (\sqrt{6} + 4\sqrt{3})\dfrac{\sqrt{6}}{4} + 3\sqrt{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{6}{4} - \sqrt{18} + 3\sqrt{2} = 0$.

   Donc $x_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ est bien une racine de P.
2. L'autre racine x_2 vérifie : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ d'où $\dfrac{\sqrt{6}}{4} + x_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{4} + \sqrt{3}$, d'où $x_2 = \sqrt{3}$.

Exercice 3

1. En développant : $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1 - 16x^2 - 16x - 4 = x^4 - 14x^2 - 16x - 3$. Il apparaît donc que P est une fonction polynôme de degré 4.
2. Utilisons l'écriture $P(x) = (x^2 + 1)^2 - (4x + 2)^2$ car c'est une différence de 2 carrés. On obtient, en factorisant :

   $P(x) = [(x^2 + 1) - (4x + 2)][(x^2 + 1) + (4x + 2)] = (x^2 - 4x - 1)(x^2 + 4x + 3)$

   Le premier trinôme $x^2 - 4x - 1$ a un discriminant $\Delta = 20$. D'où deux racines : $x_1 = 2 - \sqrt{5}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{5}$.

   Le second trinôme $x^2 + 4x + 3$ admet une racine évidente $x_3 = -1$, d'où $x_4 = -3$.

   Conclusion : $S = \{-3 ; -1 ; 2 - \sqrt{5} ; 2 + \sqrt{5}\}$

Exercice 4

Si a et c sont de signes opposés alors on a : $ac \leqslant 0$. Autrement dit, $-ac \geqslant 0$. On en déduit : $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$. Donc P admet au moins une racine réelle.

Exercice 5

Posons $X = x^2$. Ainsi, l'inéquation s'écrit : $-X^2 + 17X - 16 \geqslant 0$.

Le trinôme $-X^2 + 17X - 16$ admet une racine évidente : $X_1 = 1$. L'autre racine est donc : $X_2 = 16$.

D'où la factorisation : $-X^2 + 17X - 16 = -(X - 1)(X - 16) = -(x^2 - 1)(x^2 - 16) = -(x - 1)(x + 1)(x - 4)(x + 4)$.

On conclut avec un tableau de signes et l'on trouve : $S = [-4 ; -1] \cup [1 ; 4]$.

Exercice 6

Aire de ADE : $\dfrac{1}{2} \times AD \times AE = \dfrac{1}{2}x(18 - x)$. Aire de ABC : $\dfrac{1}{2} \times AB \times AC = \dfrac{1}{2} \times 18 \times 8 = 72$.

On veut : Aire(ADE) = $\dfrac{1}{2}$ Aire(ABC) d'où : $\dfrac{1}{2}x(18 - x) = 36$. On obtient l'équation du second degré suivante : $x^2 - 18x + 72 = 0$

On trouve $x = 6$ ou $x = 12$.

Or, D est dans le segment $[AC]$, donc on a nécessairement : $0 \leqslant x \leqslant 8$.

Conclusion : pour que l'aire du triangle ADE soit égale à la moitié de l'aire de celle du triangle ABC, il faut choisir $x = 6$m.